Colle 19

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Espaces vectoriels et applications linéaires

A. Espaces vectoriels

a. Espaces vectoriels

Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

b. Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles. Plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations Vect(A), $\mathrm{Vect(x_i)}_{i\in I}$. Tout sous-espace contenant A contient Vect(A).

c. Familles de vecteurs

Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libres, liées.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

d. Somme d'un nombre fini de sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Méthodes et savoir-faire

- Mettre en oeuvre le pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire (formalisme matriciel possible).
- Montrer qu'un ensemble est un sous $\mathbb{K}$-e.v.
- Montrer qu'une famille est libre, liée, génératrice, une base.
- Identifier une famille échelonnée en coordonnées.
- Extraire une base d'une famille génératrice.
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Manipuler l'intersection et la somme de sous-espaces vectoriels

Questions de cours

➜ Exemples $\mathbb{K}$-e.v. fondamentaux. Règles de calcul. Notion de combinaison linéaire. Les deux caractérisations d'un sous-espace vectoriel.

➜ Notation Vect(X). Propriétés dont :

- Vect(X) plus petit sous-e.v. contenant X
- si $X \subset Y$ alors $\mathrm{Vect(X)} \subset \mathrm{Vect(Y)}$
- si $x \in \mathrm{Vect(X)}$ alors $\mathrm{Vect(X \cup \{x\})} = \mathrm{Vect(X)}$
- si $x \in \mathrm{Vect(X \cup \{y\})}$ tel que x se décompose comme une combinaison linéaire dont le coefficient de y est non nul, alors $\mathrm{Vect(X \cup \{x\})} = \mathrm{Vect(X \cup \{y\})}$
- $\mathrm{Vect(X)} + \mathrm{Vect(Y)} = \mathrm{Vect(X \cup Y)}$

➜ Notion de famille génératrice de E, famille libre, famille liée, famille échelonnée (exemples), base, coordonnées, base canonique (exemples).

★ $y \in \mathrm{Vect(X)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Vect(X \cup \{y\})} = \mathrm{Vect(X)}$. Autrement dit, une famille reste génératrice lorsque qu'on lui retire un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs.

➜ Définition d'une famille libre. Propriétés liées à une famille libre X :

- si $Y \subset X$ alors Y est libre,
- si $x \in \mathrm{Vect(X)}$ alors la décomposition de x comme une combinaison linéaire de X est unique,
- si $y \notin \mathrm{Vect(X)}$, alors $X \cup \{y\}$ est libre

Donner des exemples de familles libres et de techniques pour établir qu'une famille est libre.

★ Soit $x \in \mathrm{Vect(X)}$ avec X une famille libre, alors la décomposition de x comme une combinaison linéaire de X est unique.

➜ Définition d'une famille liée. Propriétés d'une famille liée X :

- un vecteur de la famille se décompose comme une combinaison linéaire des autres,
- si $X \subset Y$ alors Y est liée,
- une famille contenant le vecteur nul est liée

Donner des exemples de familles liées.

★ Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de u dans cette base.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

★ Considérons $F = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & a+b+2c+d \\ a+c+d & b+c \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$
Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

➜ Somme de deux sous-espace vectoriels, notion de somme directe.
Caractérisations d'une somme directe par l'intersection et par la juxtaposition de bases.
Notion d'espaces supplémentaires et caractérisations.

★ Caractérisations d'une somme directe par l'intersection et par la juxtaposition de bases.

★ Donner une base de E_1, E_2, $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$ avec :

$$E_1 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; \left\{ \begin{array}{r} x - y + z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \end{array} \right. \right\} \qquad E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,1,-1);(1,0,1,0))$$