DM 18

à rendre le mardi 26 mars 2024

Schéma de Markov

On note :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.
b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées A, B et C.
On considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.
Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1), le client choisit l'activité B.
On notera A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : "le client choisit l'activité A le jour n" (respectivement B et C) et on notera a_n (respectivement b_n et c_n) sa probabilité.
On définit également la matrice U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, ainsi $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Par une formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$U_{n+1} = MU_n$$

b) Interpréter le coefficient $m_{2,3}$ de la matrice M.
c) Justifier que la somme des coefficients sur les colonnes de M vaut 1.
En particulier, $m_{1,3} + m_{2,3} + m_{3,3} = 1$.
d) En utilisant la relation établie en 1.b), déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} a_n = c_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$