Corrigé du DM 18

Schéma de Markov

1. a) Mettons en oeuvre la méthode du pivot de Gauss (en travaillant sur lignes) avec un formalisme matriciel pour montrer que P est inversible :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{cases}$$

On trouve trois pivots donc la matrice P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Ainsi, $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$.

b) On calcule premièrement $PD = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car me coefficient $(1,3)$ est obtenu par :

$$p_{1,1}d_{1,3} + p_{1,2}d_{2,3} + p_{1,3}d_{3,3} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Puis effectuant $(PD)P^{-1}$ on trouve $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la famille (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'évènements.

D'une part, le jour n, le client choisi l'une des activité, donc $A_n \cup B_n \cup C_n$ se réalise toujours : c'est l'évènement certain.

D'autre part, le jour n le client choisi une seule activité, donc les évènements sont incompatibles deux à deux.

La formules des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ a_{n+1} &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(b_n + c_n) \end{aligned}$$

On trouve de même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + c_n)$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$. Ce qui se réécrit :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_n + c_n \\ a_n + c_n \\ a_n + c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = MU_n$$

Ainsi, $\boxed{U_{n+1} = Mu_n}$.

b) $\boxed{\text{Le coefficient } m_{2,3} \text{ correspond à } \mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1})}$, la probabilité de choisir l'activité B le jour $n+1$ sachant que l'on a choisi l'activité C le jour précédent.

c) La fonction $\mathbf{P}_{C_n}$ est une probabilité. Comme la famille $(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1})$ est un système complet d'évènements, alors d'une part :

$$\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1} \cup B_{n+1} \cup C_{n+1}) = \mathbf{P}_{C_n}(\Omega) = 1$$

car la réunion des évènements forme l'évènement certain. De plus les évènements sont deux à deux incompatibles, donc

$$\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1} \cup B_{n+1} \cup C_{n+1}) = \mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1}) + \mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1}) = m_{1,3} + m_{2,3} + m_{3,3}$$

Il vient : $m_{1,3} + m_{2,3} + m_{3,3} = 1$.

La somme des coefficients de M sur la troisième colonne vaut 1. Il en est de même pour la première et la deuxième colonnes, en considérant respectivement les probabilités $\mathbf{P}_{A_n}$ et $\mathbf{P}_{B_n}$ pour le même système complet d'évènements.

Ainsi, $\boxed{\text{la somme des coefficients sur les colonnes de } M \text{ vaut } 1.}$.

⇛ *La matrice M est appelée matrice de transition du schéma.*

d) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}(n) : U_n = \dfrac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- <u>Initialisation :</u> pour $n = 1$:

$$\frac{1}{3}PD^0\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- <u>Hérédité :</u> soit $n \geq 1$; on suppose $\mathcal{P}(n)$ vérifiée.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= MU_n = \frac{1}{3}MPD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{3}(PD\underbrace{P^{-1})P}_{=I_n}D^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'après 1b)} \\ &= \frac{1}{3}PD^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

- <u>Conclusion :</u> $\boxed{\forall n \geq 1,\ U_n = \dfrac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

3. Or D est diagonale, une récurrence rapide donne :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

Il vient : $D^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$ et

$$PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}}$.