Colle 23

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

3. Applications linéaires

a. Généralités

Application linéaire	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphismes, réciproque.	L'ensemble $\mathcal{L}\left(E,F\right)$ des applications linéaire de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}\left(E,F\right)$, alors $\mathrm{Im}\left(u\right) = \mathrm{Vect(u(x_i), i \in I)}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u);\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

b. Endomorphismes

Identité, homothéties.	Notation Id_E, Id.
Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.	Non commutativité si $\dim\left(E\right) \geq 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{Id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}\left(E\right)$. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}\left(E\right)$ et $k \in \mathbb{N}$.

c. Détermination d'une application linéaire

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$: $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injective, surjective et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

d. Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $n = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}\left(u\right)$.	

e. Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.	Formes coordonnées relativement à une base.
Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.	Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	
Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	

Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

Méthodes et savoir-faire

- Calculer le rang d'une application linéaire
- Faire le lien entre le rang d'une application est l'injectivité ou la surjectivité.
- Mettre en place le théorème du rang.
- Reconnaitre un projecteur ou une symétrie, ses éléments caractéristiques. Construire de telles applications.

Questions de cours

➜ Application linéaire (vocabulaire des cas particuliers), propriétés ($f(0_E)$), structure d'e.v. de $\mathcal{L}(E, F)$, linéarité de la composition à gauche et à droite, notation puissance, formule du binôme.

★ Noyau et image d'une application linéaire. Établir que

(i) $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-e.v. de E

(ii) $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-e.v. de F

(iii) caractérisation de l'injectivité

➜ Résultats sur l'image d'une famille de vecteurs par une application linéaire.

★ Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre.

➜ Détermination d'une application linéaire :

(i) par l'image d'une base ;

(ii) sur une somme directe.

★ Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

➜ Tout sur les projecteurs et les symétries : définition, identification des espaces caractéristiques, caractérisations.

★ Caractérisation d'un projecteur ou d'une symétrie (un des deux au choix de l'élève)

➜ Définir le rang d'une application linéaire. Donner les propriétés du rang en lien avec l'injectivité et la surjectivité.
Corollaire de cela lorsque E et F sont de même dimension finie.

➜ Forme géométrique du théorème du rang, théorème du rang.

★ Forme géométrique du théorème du rang : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(u)$.

➜ Formes linéaires, hyperplans, formes coordonnées relativement à une base. Caractérisation géométrique d'un hyperplan ($E = H \oplus D$). Résultats sur l'intersection de m hyperplans.

★ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $m \geq 2$.

(i) L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.