Colle 22

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

1. Intégration

a. Continuité uniforme

Continuité uniforme.
Théorème de Heine.

Exemple des fonctions lipschitziennes.
La démonstration n'est pas exigible.

b. Fonctions continues par morceaux

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.
Fonction en escalier. Fonction continue par morceaux.

Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.

c. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeur dans $\mathbb{K}$.

Le programme n'impose pas de construction particulière.
Interprétation géométrique de l'intégrale.
Notation : $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$,

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.
Inégalité triangulaire de l'intégrale : $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leq \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$

Relation de Chasles.

Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leq a$.
Propriétés correspondantes.

Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

d. Sommes de Riemann

Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Interprétation géométrique.
Démonstration exigible pour f lipschitzienne.

e. Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

g. Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Méthodes et savoir-faire

- Calcul de primitive ou intégrale à l'aide de primitives usuelles, d'IPP ou de changement de variable.
- Identifier une somme de Riemann et déterminer sa limite.
- Manipuler une intégrale dépendant de ses bornes
- Primitivation de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$
- Mise en place d'une formule de Taylor

Questions de cours

➜ Continuité uniforme, lien avec la continuité et les fonctions lipschitziennes. Théorème de Heine. Donner les implications relatives et des contre-exemples.

★ Théorème de Heine

➜ Propriétés de l'intégrale de fonctions continues par morceaux sur un segment : linéarité, relation de Chasles, positivité (croissance), inégalité triangulaire, stricte positivité, nullité.

★ Propriété de stricte positivité de l'intégrale de fonctions continues par morceaux.

➜ Notion d'intégrale : expression de la primitive d'une application continue s'annulant en x_0, définition de l'intégrale à l'aide d'une primitive, dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

★ Si f est continue sur I et $a \in I$, alors f admet une primitive.
Et $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est la primitive de f s'annulant en a.

➜ Primitives usuelles et quasi-usuelles ($u' \times f(u) = \big(F(u)\big)'$ donner des exemples), $x \mapsto \dfrac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ (démarche), $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$.

★ Formule d'intégration par parties.
Montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ avec $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$

★ Formule de changement de variable. En posant $\boxed{u = x^3}$, calculer $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)}\mathrm{d}x$.

➜ Sommes de Riemann : $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et T_n. Résultat de convergence.

★ Sommes de Riemann : Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

➜ Énoncer les formules de Taylor. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$

★ Formule de Taylor-Young