Colle 21

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

2. Espaces de dimension finie

a. Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,...,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,...,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.

Existence de bases en dimension finie.
Théorème de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b. Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}({}_bK)$.
dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme famille libre ou génératrice de n vecteurs

Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\mathrm{rg}\,(x_1,...,x_n)$.

c. Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces; formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.

Dimension commune des supplémentaires. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

Méthodes et savoir-faire

- Comparer deux sous-e.v. : $\cap$, $\oplus$, $\subset$ ...
- Calculer le rang d'une famille et ses applications :
  - déterminer si la famille est libre, liée, génératrice
  - travail sur les colonnes pour obtenir une base de l'espace engendré
  - construire un supplémentaire
- Extraire une base d'une famille génératrice.

Questions de cours pratiques

➜ Introduire la notion de dimension d'un espace vectoriel : espace de dimension finie, propriétés sur le cardinal de familles libres, génératrices, de bases, définition de la dimension. Exemples de bases canoniques. Théorème de la base incomplète et théorème de la base extraite.

➜ Dimension d'un sous-espace, propriétés, vocabulaire des cas particuliers.
Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.

➜ Définition du rang d'une famille de vecteurs. Propriétés. Caractérisation d'une famille libre, génératrice, d'une base. Méthode de calcul du rang (sur les colonnes, sur les lignes).

★ Donner les propriétés du rang d'une famille de vecteurs et en démontrer quelques unes.

➜ Caractérisation de la somme directe de deux espaces vectoriels (utilisant les bases respectives, les rangs, les dimensions).
Caractérisations de deux supplémentaires.

➜ Notion de base adaptée à un sous-espace ou à une somme directe. Formule de Grassmann.

★ Caractérisations d'une somme directe par la juxtaposition de bases.

★ Caractérisations d'une somme directe par l'intersection.

★ Tout sous-e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie possède un supplémentaire.

★ Formule de Grassmann