DS 9

Mercredi 13 mars 2024 – durée : 4 h

Exercice 1 - Fermetures de boulangeries

Dans une commune il y a 4 boulangeries. Chacune ferme un des cinq jours de la semaine autres que le samedi et le dimanche. Le journal municipal publie la liste des jours de fermeture.
Tous les résultats sont demandés sous forme numérique explicite (toutes les puissances, les factorielles, etc. doivent être calculées).

1. Combien y a-t-il de listes possibles ?
2. Nombre de listes pour lesquelles, chaque jour, il y a au moins une boulangerie ouverte ?
3. On demande qu'aucune boulangerie ne soit la seule fermée lors de son jour de fermeture. Combien y a-t-il de listes possibles ?
4. Nombre de listes pour lesquelles il n'y a jamais deux boulangeries fermées le même jour ?
5. On suppose connue la liste des jours de fermeture de l'année précédente. Il n'y avait alors jamais deux boulangeries fermées le même jour.

   a) On note L_i ($i \in [\![1, 4]\!]$) l'ensemble des listes possibles pour lesquelles on a à la fois :
   - la i-ème boulangerie est fermée le même jour que l'année précédente,
   - à nouveau, il n'y a jamais deux boulangeries fermées le même jour.

   Déterminer les cardinaux des ensembles : L_1, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ et $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4$.

   b) En déduire le nombre de listes pour lesquelles on a à la fois :
   - aucune boulangerie n'est fermée le même jour que l'année précédente,
   - à nouveau, il n'y a jamais deux boulangeries fermées le même jour.

Exercice 2 - Introduction au poker

Une main est composée de 5 cartes prises simultanément dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains différentes ?
2. Déterminer le nombres de mains contenant exactement :

   a) une paire de dix (exactement deux dix et trois cartes de hauteurs deux à deux différentes).
   b) un brelan de rois (exactement trois rois et deux cartes de hauteurs différentes).
   c) un full aux dames par les rois (trois dames et deux rois).

3. Combien existe-t-il de mains contenant

   a) exactement une paire
   b) au moins trois cartes de même valeurs
   c) au plus un pique
   d) un as et deux piques exactement
   e) au moins un as, un valet et un 7
   f) au moins un as, un valet ou un 7.

Exercice 3 - Théorème de Lagrange (1736-1813)

Objectif : Démontrer le théorème suivant qui donne le rayon d'un disque complexe contenant toutes les racines d'un polynôme donné.

Théorème – de Lagrange

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Toute racine α de P vérifie :

$$|\alpha| \leq 1 + \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_n}\right| ; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ une racine non nulle de P.

1. Montrer que $|a_n \alpha^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k\right|$.

2. En déduire que $|\alpha| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{|\alpha|^{n-1-k}}$.

3. On pose $C = \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_n}\right| ; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$. Si $|\alpha| > 1$, alors montrer que $|\alpha| \leq \frac{C}{1 - \frac{1}{|\alpha|}}$.

4. En déduire le théorème de Lagrange : $|\alpha| \leq 1 + C$.

5. Montrer que cette majoration reste valable pour toute racine de P', de P'', etc.

6. Par exemple, donner un intervalle réel qui contient toutes les racines rélles de $P = 3X^5 - X^4 + 6X^2 + 2X - 5$.

Exercice 4 - Polynômes de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$N_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que $\mathcal{N} = (N_0, \dots, N_n)$ est libre.

2. On définit une application Δ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

On définit $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1} = \Delta^{i-1} \circ \Delta$.

a) Vérifier en détaillant les calculs que si $P = X^2 + 1$ alors $\Delta(P) = 2X + 1$.

b) Exprimer $\Delta^2(P)$ et $\Delta^3(P)$ en fonction de P.

c) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors

$$\Delta(\alpha P + \beta Q) = \alpha\Delta(P) + \beta\Delta(Q) \qquad (\mathcal{L})$$

On dit que Δ est linéaire si elle vérifie cette propriété.

d) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a la propriété suivante :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \ \sum_{k=0}^{j} \Delta^k(P)(X)N_k(j) = P(X+j) \qquad (\star)$$

Indication – *faire une récurrence sur j ; on pourra établir puis utiliser que*

$$N_k(j) = \binom{j}{k} \text{ et } \binom{j+1}{k} = \binom{j}{k-1} + \binom{j}{k}$$

e) En déduire que : $\forall P \in \mathbb{K}[X], \ \forall j \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)N_k(j) = P(j)$.

puis établir que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \ P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)N_k$.

3. Montrer que $\mathcal{N} = (N_0, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Problème 5 - Absolue monotonie

On note E l'ensemble des applications f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0,1\right[$ telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]0,1\right[, \quad f^{(n)}(x) \geq 0$$

On dit alors que f est absolument monotone sur $\left]0,1\right[$.

Partie A – Exemples

1. Donner un élément non nul de E.

➢ On pose $f = \text{Arcsin}$.

2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\left]0,1\right[\right)$, puis que $\forall x \in \left]0,1\right[, \quad \left(1-x^2\right) f''(x) = xf'(x)$.

3. Rappeler la formule de Leibniz.

4. Soit $n \geq 2$. En dérivant n fois la relation du 2), donner une relation entre $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$ et $f^{(n+2)}(x)$ pour tout $x \in \left]0,1\right[$.

   Vérifier qu'elle reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

5. Démontrer par récurrence que $f \in E$.

➢ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f_{a,b}$ sur $\left]0,1\right[$ par :

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad f_{a,b}(x) = \frac{ax+b}{x-1}$$

6. Montrer que $f_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty\left(\left]0,1\right[\right)$.

   Décomposer $f_{a,b}$ sous la forme $c + \dfrac{d}{x-1}$ et en déduire $f_{a,b}^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left]0,1\right[$, puis une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b} \in E$.

Partie B – Prolongement en 0

Soit $f \in E$.

8. En utilisant la monotonie de f, montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée sur $\left[0,1\right[$; vérifier que $f(0) \geq 0$.

9. Prouver l'existence de $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

10. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1\left(\left[0,1\right[\right)$ et que $f'(0) \geq 0$.

11. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0,1\right[$ et que $f^{(n)}(0) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C – Formule de Taylor

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0,1\right[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit φ sur $\left[0,1\right[$ par :

$$\forall t \in \left[0,1\right[, \quad \varphi(t) = f(t) - \left(f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0)\right) - \frac{\lambda t^3}{6}$$

12. Justifier que φ est trois fois dérivable sur $\left[0,1\right[$.

13. Calculer $\varphi^{(k)}(t)$ pour tout $k \in \left\{0,1,2,3\right\}$ et pour tout $t \in \left[0,1\right[$.
    Préciser les valeurs en 0.

Dans toute la suite, on fixe $a \in \left]0,1\right[$.

14. Montrer que l'on peut choisir λ tel que $\varphi(a) = 0$.

Nous supposons désormais que $\varphi(a) = 0$.

15. Montrer qu'il existe $c_1 \in \left]0,a\right[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

16. En itérant le procédé, montrer qu'il existe $c_3 \in \left]0,1\right[$ tel que $\varphi^{(3)}(c_3) = 0$.

17. En déduire que :

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{6}f^{(3)}(c_3)$$

Nous supposons désormais que f vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left[0,1\right[, \quad f^{(n)}(x) > 0$$

18. Démontrer que la relation :

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{6}f^{(3)}(c_3(a))$$

    définit un unique élément $c_3(a) \in \left]0,1\right[$.

19. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1(a) \in \left]0,a\right[$ tel que :

$$f(a) = f(0) + af'(c_1(a))$$

    Démontrer que $c_1(a)$ est unique et vérifie : $c_1(a) \underset{0}{\sim} \dfrac{a}{2}$

Proposition de corrigé du devoir surveillé 9

Exercice 1 - Fermetures de boulangeries

1. La publication des jours de fermeture revient à choisir 4 jours avec ordre (car les boulangeries sont deux à deux différentes) et avec répétitions (elles peuvent fermer le même jour) parmi les cinq premiers jours de la semaine : c'est une 4-liste sur {L,Ma,Me,J,V}. Il y a 5^4 possibilités.

   Ainsi, $\boxed{\text{il y a 625 listes possibles.}}$

2. Considérant l'ensemble complémentaire, il s'agit de dénombrer les listes où toutes les boulangeries ferment le même jour. Il y a en a 5. Or $625 - 5 = 620$.

   Ainsi, $\boxed{\text{il y a 620 listes pour lesquelles, chaque jour, il y a au moins une boulangerie ouverte}}$.

3. Les listes telles qu'aucune boulangerie ne soit la seule fermée lors de son jour de fermeture se distinguent en deux catégories :

   ⇛ les quatre boulangeries ferment le même jour : $\binom{5}{1}$ possibilités de choisir le jour.

   ⇛ Les boulangeries ferment deux par deux :

   - Nombre de façons de choisir les deux boulangeries qui fermerons le même jour (les autres fermant un autre jour) : il s'agit de choisir deux boulangeries sans ordre et sans répétition parmi les quatre, c'est un 2-combinaison, il y en a $\binom{4}{2} = 6$.
   - Nombre de façons de choisir les deux jours de fermeture : il s'agit de choisir deux jours avec ordre et sans répétition parmi les cinq possibles, c'est un 2-arrangement, il y en a $\mathrm{A}_5^2 = 20$.

   Or $5 + 6 \times 20 = 125$.

   Ainsi, $\boxed{\text{il y a 125 listes telles qu'aucune boulangerie ne soit la seule fermée un jour donné.}}$

4. Cette situation consiste à choisir quatre jours avec ordre et sans répétition parmi les cinq possibles, c'est un 4-arrangement, il y en a $\mathrm{A}_5^4 = 5! = 120$.

   Ainsi, $\boxed{\text{il y a 120 listes pour lesquelles il n'y a jamais deux boulangeries fermées le même jour}}$

5. a) Cardinal de L_1 :
   - la ième boulangerie ne change pas son jour de fermeture : 1 possibilité.
   - il faut choisir parmi les quatre jours restant les trois jours de fermeture de trois autres boulangeries (avec ordre et sans répétition) : $\mathrm{A}_4^3 = 24$.

   Ainsi, $\mathrm{Card}(L_1) = 24$.

   Procédant de la même façon, on trouve :

$$\mathrm{Card}\,(L_1 \cap L_2) = 1 \times \mathrm{A}_3^2 = 6 \qquad \mathrm{Card}\,(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = 1 \times \mathrm{A}_2^1 = 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}\,(L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4) = 1$$

   Ainsi, $\boxed{\mathrm{Card}(L_1) = 24, \quad \mathrm{Card}(L_1 \cap L_2) = 6, \quad \mathrm{Card}(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = 2}$
   et $\boxed{\mathrm{Card}(L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4) = 1.}$

   b) Soit A l'ensemble des listes telles qu'il n'y a jamais deux boulangeries fermées le même jour. Soit L l'ensemble des listes pour lesquelles on a à la fois aucune boulangerie n'est fermée le même jour que l'année précédente et il n'y a jamais deux boulangeries fermées le même jour. Alors on a $L \subset A$ et $A \backslash L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$. Donc

$$\mathrm{Card}(L) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)$$

Calcul de $\text{Card}(L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)$. Comme les ensembles ne sont pas deux à deux disjoints, utilisons la formule du crible :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4) &= \text{Card}(L_1) + \text{Card}(L_2) + \text{Card}(L_3) + \text{Card}(L_4) \\
&\quad - \text{Card}(L_1 \cap L_2) - \text{Card}(L_1 \cap L_3) - \text{Card}(L_1 \cap L_4) \\
&\quad - \text{Card}(L_2 \cap L_3) - \text{Card}(L_2 \cap L_4) - \text{Card}(L_3 \cap L_4 \\
&\quad + \text{Card}(L_1 \cap L_2 \cap L_3) + \text{Card}(L_1 \cap L_2 \cap L_4) \\
&\quad + \text{Card}(L_1 \cap L_3 \cap L_4) + \text{Card}(L_2 \cap L_3 \cap L_4) \\
&\quad - \text{Card}(L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4) \\
&= 4 \times 24 - 6 \times 6 + 4 \times 2 - 1 \times 1 \\
&= 67
\end{aligned}$$

Or $120 - 67 = 53$.
Ainsi, $\boxed{\text{Card}(L) = 53}$.

Exercice 2 - Introduction au poker

Il n'y a ni ordre, ni répétition puisque les cartes sont prises simultanément. Ainsi, une main est une combinaison de 5 cartes parmi les 32.

1. $\boxed{\text{Il y a } \binom{32}{5} \text{ mains possibles.}}$

2. a) Travaillons par structuration :
   - Nombre de façons de choisir les couleurs des deux 10 : $\binom{4}{2}$
   - Nombre de façons de choisir les 3 autres hauteurs : $\binom{7}{3}$ car il y a 7 hauteurs autres que 10.
   - Nombre de façons de choisir les couleurs des 3 autres cartes, avec ordre (en fonction des trois hauteurs choisies) et avec répétitions (elles peuvent avoir le même couleur), donc ce sont les 3-listes sur les couleurs : 4^3.

   Ainsi, $\boxed{\text{il y a } \binom{4}{2}\binom{7}{3}4^3 \text{ mains contenant une paire de 10.}}$

   b) $\boxed{\text{Il y a } \binom{4}{3}\binom{7}{2}4^2 \text{ mains contenant un brelan de rois.}}$

   c) $\boxed{\text{Il y a } \binom{4}{3}\binom{4}{2} \text{ full aux dames par les rois.}}$

3. a) Travaillons par structuration :
   - Nombre de façons de choisir la valeur de la paire : $\binom{8}{1} = 8$ (Il y a 8 valeurs différentes dans un jeu de 32 cartes).
   - Pour le reste, nous l'avons traité en 1a) : $\binom{4}{2}\binom{7}{3}4^3$

   Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de mains avec exactement une paire est : } \binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}4^3.}$

   b) On cherche le nombre de mains qui ont au moins trois cartes de même valeur : les brelans, les fulls et les carrés. Procédons par disjonction suivant le nombre de répétions : 3 ou 4
   Nombre de mains avec exactement trois cartes de même valeur : $\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{28}{2}$

Nombre de mains avec (exactement) un carré : $\binom{8}{1}\binom{4}{4}\binom{28}{1}$

Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de mains avec au moins un brelan est } \binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{28}{2} + \binom{8}{1}\binom{28}{1}.}$

c) Discutons les deux cas (disjoints) possibles :

- Nombre de mains sans pique : $\binom{24}{5}$. Car il y a 24 cartes qui ne sont pas des piques.
- Nombre de mains avec exactement un pique :
  Nombre de façons de choisir le pique : $\binom{8}{1}$

  Nombre de façons de choisir les autres cartes : $\binom{24}{4}$

  Ainsi, le nombre de mains avec exactement un pique est : $\binom{8}{1}\binom{24}{4}$

  Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de mains avec au plus un pique est : } \binom{24}{5} + \binom{8}{1}\binom{24}{4}.}$

d) Discutons les deux cas (disjoints) possibles :

- Cas des mains contenant l'as de pique :
  Nombre de façons de choisir le second pique : $\binom{7}{1}$
  Nombre de façons de choisir les trois autres cartes parmi les 21 qui ne sont ni des piques, ni des as : $\binom{21}{3}$

- Cas des mains ne contenant pas l'as de pique :
  Nombre de façons de choisir les piques : $\binom{7}{2}$

  Nombre de façons de choisir l'as : $\binom{3}{1}$

  Nombre de façons de choisir les deux autres cartes : $\binom{21}{2}$

  Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de mains avec un as et deux piques exactement est : } \binom{7}{1}\binom{21}{3} + \binom{7}{2}\binom{3}{1}\binom{21}{2}.}$

e) Notons E l'ensemble des mains contenant (au moins) un as, un valet et un 7 ; A [respectivement B et C] l'ensemble des mains contenant un as [respectivement un valet et un 7] :

$$E = A \cap B \cap C$$

La règle de de Morgan donne : $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\overline{A}) \cup \mathrm{Card}(\overline{B}) \cup \mathrm{Card}(\overline{C})$.
Ces ensembles ne sont pas deux à deux disjoints car il existe des mains qui n'ont ni as, ni valet ; ou ni as, ni 7 ...
Utilisons la formule de Poincaré : $\mathrm{Card}(\overline{E}) = \mathrm{Card}(\overline{A}) + \mathrm{Card}(\overline{B}) + \mathrm{Card}(\overline{C}) - \mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B}) - \mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{C}) - \mathrm{Card}(\overline{B} \cap \overline{C}) + \mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.
On a $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(\overline{B}) = \mathrm{Card}(\overline{C}) = \binom{28}{5}$ et

$$\mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathrm{Card}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \binom{24}{5} \qquad \mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \binom{20}{5}$$

Donc, $\mathrm{Card}(\overline{E}) = 3\binom{28}{5} - 3\binom{24}{5} + \binom{20}{5}$ et $\mathrm{Card}(E) = \binom{32}{5} - \mathrm{Card}(\overline{E})$.
Ainsi, le nombre de mains contenant (au moins) un as, un valet et un 7 est :

$$\boxed{\binom{32}{5} - 3\binom{28}{5} + 3\binom{24}{5} - \binom{20}{5}}$$

f) Notons F l'ensemble des mains contenant (au moins) un as, un valet ou un 7. On $F = A \cup B \cup C$. Il est plus facile de déterminer

$$\overline{F} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

Le nombre de mains contenant aucun as, aucun valet et aucun 7 est $\binom{20}{5}$ car il reste 20 cartes possibles.

Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de mains contenant (au moins) un as, un valet ou un 7 est : } \binom{32}{5} - \binom{20}{5}.}$

Exercice 3 - Théorème de Lagrange (1736-1813)

1. Comme α est une racine de P alors $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$.

   Ainsi, $a_n \alpha^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k$ et donc $\boxed{|a_n \alpha^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k\right|.}$

2. Comme $\alpha \neq 0$ et $a_n \neq 0$, on divise l'égalité précédente par $a_n \alpha^{n-1}$; puis l'inégalité triangulaire donne :

$$|\alpha| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n \alpha^{n-1-k}}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\alpha| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{|\alpha|^{n-1-k}}}$$

3. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq C$. Par somme d'inégalités, on obtient : $\alpha \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C}{|\alpha|^{n-1-k}}$

   Une somme géométrique avec $\frac{1}{|\alpha|} \neq 1$ et le changement de variable $j = n-1-k$ donnent :

$$\alpha \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|\alpha|^{n-1-k}} = C \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{|\alpha|^j} = C \frac{1 - \frac{1}{|\alpha|^n}}{1 - \frac{1}{|\alpha|}} = \frac{C}{1 - \frac{1}{|\alpha|}} - \underbrace{\frac{C \frac{1}{|\alpha|^n}}{1 - \frac{1}{|\alpha|}}}_{\geq 0 \text{ car } |\alpha| > 1}$$

   Ainsi, il vient $\boxed{|\alpha| \leq \frac{C}{1 - \frac{1}{|\alpha|}}.}$

4. Procédons par disjonction de cas :
   - Si $|\alpha| \leq 1$ alors comme $C \geq 0$, il vient $|\alpha| \leq 1 + C$
   - Si $|\alpha| > 1$ alors, multipliant la relation précédente par $1 - \frac{1}{|\alpha|} (> 0)$, il vient $|\alpha| - 1 \leq C$.

   Dans tous les cas, $\boxed{\text{la relation } |\alpha| \leq 1 + C \text{ est vérifiée}}$ ce qui constitue le théorème de Lagrange.

5. Notons $C(P)$ la majoration de Lagrange définie ci-avant pour le polynôme$P$.

   Comme $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ est de terme dominant $n a_n X^{n-1}$, il vient pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$\left|\frac{k a_k}{n a_n}\right| = \frac{k}{n} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq 1 \times C(P)$$

Ainsi $C(P') \leq C(P)$.
Une récurrence rapide donne que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $C\big(P^{(j)}\big) \leq C(P)$.
En appliquant le théorème de Lagrange à $P^{(j)}$, il vient que toute racine β de $P^{(j)}$ vérifie :

$$|\beta| \leq 1 + C\big(P^{(j)}\big) \leq 1 + C(P)$$

Ainsi, $\boxed{\text{la majoration reste valable pour toute racine de } P', \text{ de } P'', \text{ etc.}}$

6. Par exemple, pour $P = 3X^5 - X^4 + 6X^2 + 2X - 5$, $C(P) = 2$, donc ses dérivées est celles de ses polynômes dérivés sont dans $[-3, 3]$.

Exercice 4 - Polynômes de Newton

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$; le terme dominant de N_k est $\dfrac{X^k}{k!}$ et donc $\deg(N_k) = k$.

   La famille $(N_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est échelonnée en degré, donc $\boxed{\mathcal{N} = (N_0, \dots, N_n) \text{ est libre}}$.

   Démontrons ce résultat. Utilisons un raisonnement par l'absurde.
   Supposons que la famille est liée, donc il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\backslash\{(0, \dots, 0)\}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k N_k = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad (\star)$$

   Ainsi, il existe $i \in\in [\![0, n]\!]$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Posons $i_0 = \max(i \in [\![0, n]\!];\ \alpha_i \neq 0)$.

$$(\star) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k N_k = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

   En évaluant en x, puis divisant par x^{i_0} et passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, l'<u>unicité de la limite</u> donne :

$$i \in\in [\![0, i_0 - 1]\!] \quad \Rightarrow \quad \frac{N_i(x)}{x^{i_0}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{i!x^{i-i_0}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_i N_i(x)}{x^{i_0}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$(\star) \quad \Rightarrow \quad 0 + \cdots + 0 + \frac{\alpha_{i_0}}{i_0!} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{i_0} = 0$$

   Ce qui contredit la construction de α_{i_0}.
   Ainsi, la famille est libre.

2. a) On a $\Delta(X^2 + 1) = (X + 1)^2 + 1 - \big(X^2 + 1\big) = X^2 + 2X + 1 + 1 - X^2 - 1 = 2X + 1$.

   b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$ et

$$\begin{array}{rcl}
\Delta^2(P) & = & \Delta(\Delta(P)) = \Delta(P)(X+1) - \Delta(P)(X) \\
& = & P(X+2) - P(X+1) - (P(X+1) - P(X)) \\
& = & P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) \\
\Delta^3(P) & = & \Delta\left(\Delta^2(P)\right) \\
& = & P(X+3) - 2P(X+2) + P(X+1) - (P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)) \\
& = & P(X+3) - 3P(X+2) + 3P(X+1) - P(X)
\end{array}$$

   Ainsi, $\boxed{\begin{array}{l} \Delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) \\ \Delta^3(P) = P(X+3) - 3P(X+2) + 3P(X+1) - P(X) \end{array}}$.

   $\Rrightarrow$ *On identifie la similitude des coefficients avec ceux de la formule du binôme.*

c) Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl}\Delta(\alpha P+\beta Q) & = & (\alpha P+\beta Q)(X+1)-(\alpha P+\beta Q)(X) \\ & = & \alpha P(X+1)+\beta Q(X+1)-\alpha P(X)+\beta Q(X) \\ & = & \alpha\left(P(X+1)-P(X)\right)+\beta\left(Q(X+1)-Q(X)\right) \\ & = & \alpha\Delta(P)+\beta\Delta(Q)\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\Delta \text{ est linéaire}}$

d) Commençons par montrer deux résultats préliminaires.

➜ Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, j]\!]$

$$N_k(j) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(j-i) = \frac{1}{k!}\frac{j!}{(j-k)!} = \binom{j}{k} \quad (R1)$$

➜ Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, j]\!]$

$$\binom{j}{k-1}+\binom{j}{k} = \frac{j!}{(k-1)!(j-k+1)!}+\frac{j!}{k!(j-k)!} = \frac{j!}{k!(j-k+1)!}\left(k+(j-k+1)\right) = \binom{j+1}{k} \quad (R2)$$

Ce résultat est la <u>formule de Pascal</u> (à connaître !).

⇛ Montrons $(\star)$ par récurrence sur j :

- Initialisation : Pour $j = 0$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors

$$\sum_{k=0}^{0}\Delta^k(P)(X)N_k(j) = \Delta^0(P)(X)N_0(0) = P(X)\binom{0}{0} = P(X) = P(X+0)$$

La relation $(\star)$ est vraie au rang 0.

- Hérédité : Soit $j \in \mathbb{N}$; on suppose que la relation $(\star)$ est vérifiée au rang j.

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{k=0}^{j+1}\Delta^k(P)(X)N_k(j+1) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{j+1}\Delta^k(P)(X)N_k(j+1)+\underbrace{P(X)}_{k=0} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{j+1}\binom{j+1}{k}\Delta^k(P)(X)+P(X) \text{ d'après } (R1) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{j+1}\left(\binom{j}{k}+\binom{j}{k-1}\right)\Delta^k(P)(X)+P(X) \text{ d'après } (R2) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{j+1}\binom{j}{k}\Delta^k(P)(X)+\sum_{k=1}^{j+1}\binom{j}{k-1}\Delta^k(P)(X)+P(X) \\ & & \text{seconde somme : changement d'indice } \boxed{i=k-1} \\ & & \text{première somme : } \binom{j}{j+1}=0 \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{j}\binom{j}{k}\Delta^k(P)(X)+\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\Delta^{i+1}(P)(X)+P(X) \\ & & \text{seconde somme : "factorisation à gauche par } \Delta \text{ par linéarité} \\ & & \text{première somme : } P(X) \text{ correpond au terme } k=0 \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\Delta^k(P)(X)+\Delta\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\Delta^i(P)(X)\right) \\ & & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & P(X+j)+\Delta(P(X+j)) \\ & = & P(X+j)+P(X+j+1)-P(X+j) = P(X+j+1)\end{array}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \sum_{k=0}^{j} \Delta^k(P)(X) N_k(j) = P(X+j)}$.

e) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $j \in [\![0, n]\!]$. D'après 2d) :

$$\sum_{k=0}^{j} \Delta^k(P)(X) N_k(j) = P(X+j)$$

En évaluant la relation en 0, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{j} \Delta^k(P)(0) N_k(j) = P(j)$$

De plus, pour $k \in [\![j+1, n]\!]$ alors $N_k(j) = \binom{j}{k} = 0$ par convention, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) N_k(j) = P(j)$$

Ainsi, $\boxed{\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall j \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) N_k(j) = P(j).}$

➢ Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Posons $Q = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) N_k$, alors $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
Le polynôme $P - Q$ est de degré inférieur à n. Cependant, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$

$$Q(j) = P(j) \quad \Rightarrow \quad (P-Q)(j) = 0$$

Ainsi, $P-Q$ possède au moins $n+1$ racines distinctes ce qui est incompatible avec son degré, donc $P-Q$ est le polynôme nul.

Ainsi, $\boxed{\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) N_k.}$

3. La famille est libre, d'après 1). De plus, d'après 2e) la famille $\mathcal{N}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\boxed{\text{la famille } \mathcal{N} \text{ est un base de } \mathbb{K}_n[X]}$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ dans la base } \mathcal{N} \text{ sont } (\Delta^0(P)(0), \Delta^1(P)(0), \ldots, \Delta^n(P)(0)).}$

Problème 5 - Absolue monotonie

Partie A – Exemples

1. **Exemple**
$\boxed{\text{Les fonctions exp, } x \mapsto x^3,\ x \mapsto 1 \text{ sont absolument monotones sur }]0, 1[.}$
En effet, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes leurs dérivées successives sont positives.

2. **Une relation entre f' et f''**
sin est continue, strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
D'après le théorème de la bijection, sin définit donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est la fonction $f = \text{Arcsin}$.

De plus, sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin'$ s'annule en $\pm\frac{\pi}{2}$.
Donc f est dérivable sur $\left[-1,1\right]\setminus\left\{\pm\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} =]-1,1[$, de dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\text{Arcsin}(x))}}$$

Or $x \in]-1,1[\quad \Rightarrow \quad \text{Arcsin}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad \cos(\text{Arcsin}(x)) > 0$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On pouvait directement donner la dérivabilité de Arcsin *sur* $]-1,1[$*. Ce qui suit est le coeur de la question.*
$u : x \mapsto 1-x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ à valeurs dans $]0,1[$; $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $]0,1[\subset \mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas. Ainsi, f' est obtenue comme composée puis quotients de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,1[.}$
De plus, en dérivant, il vient :

$$f'(x) = u(x)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\frac{1}{2}u'(x)u(x)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{1-x^2}f'(x)$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \left]0,1\right[, \quad \left(1-x^2\right)f''(x) = xf'(x).}$

3. **Formule de Leibniz.**
Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables au point a (c'est-à-dire sur un voisinage de a), le produit est n fois dérivable et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

4. **Application de la formule de Leibniz**
Soit $n \geq 2$. f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, par produit les membres de l'égalité du 2) sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous pouvons dériver à l'ordre n pour $x \in]0,1[$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1-x^2\right)^{(k)}f^{(n+2-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^{(k)}f^{(n+1-k)}(x)$$

Les termes sont nuls sauf à gauche pour $k \in \{0,1,2\}$, et à droite pour $k \in \{0,1\}$, il vient :

$$\left(1-x^2\right)f^{(n+2)}(x) + n\big(-2x\big)f^{(n+1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}\big(-2\big)f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)$$

Après avoir regroupé les termes, on a

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ (1-x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2f^{(n)}(x) \quad (\bigstar)}$$

Pour $n=0$, on retrouve la relation du 2).
Pour $n=1$, la dérivée de la relation 2) donne : $(1-x^2)f^{(3)}(x) - 2xf^{(2)}(x) = xf^{(2)}(x) + f'(x)$ ce qui correspond à $(\bigstar)$.
Ainsi, $\boxed{\text{la relation } (\bigstar) \text{ est vraie pour } n \in \mathbb{N}.}$

5. f **est absolument monotone sur** $\left]0,1\right[$
Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \left]0,1\right[, \quad f^{(n)}(x) \geq 0$

- Initialisation : Pour $x \in \left]0,1\right[$, $f(x) = \text{Arcsin}(x) \geq 0$ et $f'(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \geq 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies. D'après la question précédente, pour tout $x \in \left[0,1\right[$:

$$f^{(n+2)}(x) = \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{\geq 0}\left(\underbrace{(2n+1)xf^{(n+1)}(x)}_{\geq 0 \text{ d'après } \mathcal{P}(n+1)} + \underbrace{n^2 f^{(n)}(x)}_{\geq 0 \text{ d'après } \mathcal{P}(n)}\right) \geq 0$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+2$.
- Conclusion : $\boxed{f \in E, \text{ autrement dit, } f = \text{Arcsin est absolument monotone sur } \left]0,1\right[.}$

6. **Régularité de $f_{a,b}$**
   $f_{a,b}(x)$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc sur $\left]0,1\right[$ et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   En mettant au même dénominateur et par identification des coefficients on trouve :

$$\forall x \in]0,1[\quad \frac{ax+b}{x-1} = c + \frac{d}{x-1} = \frac{cx-c+d}{x-1} = a + \frac{a+b}{x-1}$$

   Après avoir fait le calcul des premières dérivée de $f_{a,b}$, on conjecture :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \forall x \in]0,1[\quad f_{a,b}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(a+b)n!}{(x-1)^{n+1}}}$$

   Une récurrence permet d'établir la conjecture.

7. **Condition pour que f soit absolument monotone sur $\left]0,1\right[$**

- Pour $n = 0$, sur $]0,1[$, $x \mapsto x-1$ est négative. Donc $f_{a,b}$ est positive si et seulement si $x \mapsto ax+b$ est négative. Or $x \mapsto ax+b$ est monotone, donc elle est négative si c'est le cas aux deux bornes de l'intervalle de définition, c'est-à-dire si $b \leq 0$ et $a+b \leq 0$.
- Pour $n \neq 0$, sur $]0,1[$, $\text{sg}(x-1) = -1$ (fonction signe) et donc

$$\text{sg}\left(\frac{(-1)^n(a+b)n!}{(x-1)^{n+1}}\right) = (-1)^n(-1)^{n+1}\text{sg}(a+b) = -\text{sg}(a+b)$$

  Donc $f^{(n)} \geq 0$ si et seulement si $a+b \leq 0$.

Ainsi, $\boxed{f_{a,b} \in E \text{ si et seulement si } a+b \leq 0 \text{ et } b \leq 0.}$

Partie B – Prolongement en 0

8. **Prolongement de f en 0**
$f' \geq 0$ sur $\left]0,1\right[$, donc f est une fonction croissante sur $\left]0,1\right[$ ainsi f admet en 0^+ une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Comme $f \geq 0$ sur $\left]0,1\right[$, par passage à la limite, $\lim\limits_{0^+} f \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 par une valeur positive.}}$

9. **Limite de la dérivée en 0**
Le même raisonnement appliqué à f' et plus généralement à toute dérivée successive de f.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \text{ possède une limite finie positive en } 0^+.}$

10. **Dérivabilité à droite de f en 0**
$f \in \mathcal{C}^0([0,1[)$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. De plus, f' possède une limite finie positive à droite en 0.
Alors le théorème de prolongement de la dérivée, donne que $\boxed{f \text{ est donc dérivable à droite en } 0}$ et $\boxed{f'_d(0) \geq 0.}$

11. **Dérivées successives à droite de f en 0**
Le même raisonnement appliqué à f' et plus généralement, par récurrence, à toute dérivée successive de f donne que les dérivées successive de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
Ainsi, $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty([0,1[) \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) \geq 0.}$
On pouvait aussi mettre en place le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ vu en cours.

Partie C – Formule de Taylor

12. **Dérivabilité de φ**
φ est la somme de f, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0,1\right[$ et d'une fonction polynômiale.
Ainsi, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,1[)$ et donc $\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^3([0,1[).}$

13. **Dérivées successives de φ**
Pour $t \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= f'(t) - \big(f'(0) + tf''(0)\big) - \frac{\lambda t^2}{2} \\
\varphi''(t) &= f''(t) - f''(0) - \lambda t \\
\varphi^{(3)}(t) &= f^{(3)}(t) - \lambda
\end{aligned}$$

De plus, lorsque $t = 0$, on vérifie : $\boxed{\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0 \text{ et } \varphi^{(3)}(0) = f^{(3)}(0) - \lambda \neq 0.}$

14. **Choix de λ**
$\varphi(a) = 0$ si et seulement si $f(a) - \left(f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2} f''(0)\right) - \dfrac{\lambda a^3}{6} = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } \lambda = \dfrac{6}{a^3}\left(f(a) - \left(f(0) + af'(0) + \dfrac{a^2}{2} f''(0)\right)\right) \text{ alors } \varphi(a) = 0.}$

15. **Théorème de Rolle**
$\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1[)$ donc $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,a])$ et $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$.
D'après le théorème de Rolle, $\boxed{\text{il existe } c_1 \in \left]0,a\right[\text{ tel que } \varphi'(c_1) = 0.}$

16. **Théorème de Rolle itéré**

- $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1[)$ donc $\varphi' \in \mathcal{C}^1([0,c_1])$ et $\varphi'(0) = \varphi'(c_1) = 0$.
  D'après le théorème de Rolle, il existe $c_2 \in \left]0, c_1\right[$ tel que $\varphi''(c_2) = 0$.

- $\varphi \in \mathcal{C}^3([0,1[)$ donc $\varphi'' \in \mathcal{C}^1([0,c_2])$ et $\varphi''(0) = \varphi''(c_2) = 0$.
  D'après le théorème de Rolle, $\boxed{\text{il existe } c_3 \in \left]0, c_2\right[\subset]0,1[\text{ tel que } \varphi^{(3)}(c_3) = 0.}$

17. **Formule de Taylor-Lagrange**
Rappelons que sur $[0,1[$, $\varphi^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - \lambda$ et donc, d'après ce qui précède, $\lambda = f^{(3)}(c_3)$.
Considérant $\varphi(a) = 0$, il vient :

$$f(a) - \left(f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0)\right) + \frac{f^{(3)}(c_3)a^3}{6}$$

Ainsi, $\boxed{f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{6}f^{(3)}(c_3).}$

18. **Unicité de $c_3(a)$**
Nous savons que $f^{(4)} > 0$, donc $f^{(3)}$ est strictement croissante sur $\left]0,1\right[$ donc injective.
Pour $a \in]0,1[$ fixé, l'équation du 17) donne que λ a un unique antécédent par $f^{(3)}$ (l'existence a déjà été établie en 16).
Ainsi, $\boxed{\text{pour } a \in]0,1[,\ \exists! c_3(a) \in]0,1[\text{ tel que } f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{6}f^{(3)}(c_3(a)).}$

19. **Existence et équivalent simple de $c_1(a)$**
⇛ $f \in \mathcal{C}^1([0,1[)$ donc $f \in \mathcal{C}^1([0,a])$. D'après le théorème d'égalité des accroissements finis, il existe $c_1(a) \in \left]0, a\right[$ tel que :

$$f(a) = f(0) + af'(c_1(a))$$

$f'' > 0$ sur $\left]0, a\right[$: f' est donc strictement croissante sur $\left]0, a\right[$. En particulier, f' est injective sur $\left]0, a\right[$, donc l'équation d'inconnue c :

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(0)}{a}$$

a une unique solution. Ainsi, $\boxed{c_1(a) \text{ est donc défini de façon unique.}}$
⇛ D'après la question précédente :

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{6}f^{(3)}(c_3(a))$$

Nous venons de démontrer : $f(a) = f(0) + af'(c_1(a))$. Ainsi, par identification :

$$af'(c_1(a)) = af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{6}f^{(3)}(c_3(a))$$

et en regroupant : $f'(c_1(a)) - f'(0) - \frac{a}{2}f''(0) = \frac{a^2}{6}f^{(3)}(c_3(a))$.
Nous voulons un résultat au voisinage de 0 pour a, on peut donc travailler en supposant $a \leq \frac{1}{2}$.
$f^{(3)}$ est une fonction positive, strictement croissante sur $\left[0, 1\right[$, donc, en posant $K = f^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right)$, il vient $0 < f^{(3)}(c_3(a)) < K$. Ainsi,

$$\left|f'(c_1(a)) - f'(0) - \frac{a}{2}f''(0)\right| \leq \frac{Ka^2}{6}$$

Nous en déduisons : $f'(c_1(a)) - f'(0) - \dfrac{a}{2}f''(0) \underset{0}{=} o(a)$
Ainsi, sachant que $f''(0) \neq 0$ par hypothèse de la Partie C) :

$$f'(c_1(a)) - f'(0) \underset{0}{\sim} \frac{a}{2}f''(0)$$

De plus, la définition de la dérivée de f' en 0 donne : $f'(c_1(a)) - f'(0) \underset{0}{\sim} c_1(a)f''(0)$

Ainsi, par transitivité de l'équivalence et simplifiant par $f''(0) \neq 0$, on a $\boxed{c_1(a) \underset{0}{\sim} \dfrac{a}{2}.}$