Ensembles et applications

Sommes doubles

Exercice 5.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}3^{k}\right)$ (3) $\displaystyle\sum_{1\leq p<q\leq n} pq$

Exercice 5.2 ❄ Soit n entier naturel non nul. Prouver que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)$$

Que vaut cette somme ?

Ensembles

Exercice 5.3 Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E.
Montrer que $A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$ et que $A=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})$.

Exercice 5.4 Soit E et F deux ensembles.
1. Montrer que $E\subset F$ si et seulement si $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$.
2. Comparer $\mathcal{P}(E\cap F)$ et $\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.
3. Comparer $\mathcal{P}(E\cup F)$ et $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$.

Indication : Raisonnement à double sens et donner un contre-exemple pour montrer qu'une inclusion est fausse en général.

Exercice 5.5
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de sous-ensemble de E. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\geq k$, on note

$$C_n=\bigcup_{i=k}^{n}A_i$$

Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty}A_i=\bigcup_{i=k}^{+\infty}C_i$

Exercice 5.6 Soit $A\subset E$. Caractériser $X\subset E$ dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ A\cup X=E\quad(2)\ A\cap X=A\quad(3)\ A\cup X=A\quad(4)\ A\cap X=\emptyset$$

Exercice 5.7 ❄ Soit E un ensemble. À tout élément (A,B) de $(\mathcal{P}(E))^2$, on associe l'élément noté $A\Delta B$ de $\mathcal{P}(E)$ défini par :

$$A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$$

1. A l'aide d'un diagramme, représenter l'élément $A\Delta B$.
2. Montrer que, pour tout $(A,B,C)\in(\mathcal{P}(E))^3$, on a :

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

3. Montrer que $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

Applications

Exercice 5.8 *Image directe, image réciproque*
Soit $g:[0;4\pi]\to\mathbb{R}:x\mapsto\cos(x)$.
Donner l'image directe de $[0,1]$, $[0,5]$, $\left[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$.
Donner l'image réciproque de $\{0\}$, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\left[-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Exercice 5.9 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

Dans cet exercice, vous avez la liberté d'introduire les constantes qui faciliteront la rédaction.
1. Dresser le tableau de variation de f. Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. Préciser l'image réciproque de $\{0\}$ par f, de $\{6\}$ par f.
2. Déterminer $f([2,3])$, $f(]0,3])$, $\overset{-1}{f}(]0,+\infty[)$, $\overset{-1}{f}([-6,6])$,
3. f est elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chaque réponse.

4. Déterminer deux intervalles ouverts I et J tels que $g : \begin{cases} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ soit bijective avec $0 \in I$ et $0 \in J$

Exercice 5.10 Écrire toutes les applications de $E = \{1,2\}$ dans $F = \{a,b,c\}$ et, pour chacune, indiquer si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 5.11 ❄ ✔ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que :

1. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective.
2. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective.

Exercice 5.12 Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 5.13 ❄ ✔ Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que : «f est injective ou surjective» si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$

Exercice 5.14 ❄ ✔ Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 5.15 ❄ ❄ Soit $f : E \to F$. Montrer que :

(i) f est injective $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E,\ f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

(ii) f est surjective $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E,\ f(\bar{A}) \supset \overline{f(A)}$

Exercice 5.16 ❄ ❄ Soient E un ensemble, $A, B \subset E$ et **Classique**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Trouver une C.N.S. portant sur A et B pour les deux cas suivants :
   a) f injective.
   b) f surjective.
2. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1}.

Indication : Injectivité : regarder l'image de E et de $A \cup B$.
Surjectivité : considérer un antécédent de $(A, \emptyset)$.

Exercice 5.17 *Théorème de Cantor–Bernstein* ❄ ❄ ❄
Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$, $g \in E^F$ deux applications injectives. Montrons qu'il existe une bijection de E dans F.

Nous pouvons définir par récurrence :

$$\begin{cases} & A_0 = \overline{g(F)} \subset E \\ \forall n \in \mathbb{N} & A_{n+1} = g \circ f(A_n) \subset E \end{cases}$$

et l'ensemble

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

1. Démontrer que

$$\begin{cases} g \circ f(A) \subset A \\ \overline{A} = g(F) \setminus g \circ f(A) \end{cases}$$

2. Soit φ la fonction définie sur E par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in \overline{A} \end{cases}$$

   a) Démontrer que φ est injective,
   b) Démontrer que φ est surjective,
   c) Conclure

3. Soit $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$s(n) = n + 1$$

Préciser les ensembles A, $\overline{A}$ et la fonction φ lorsque $E = F = \mathbb{N}$ et $f = g = s$.

Remarque – Le théorème de Cantor-Bernstein est utile pour définir une relation d'ordre sur les classes d'ensembles équipotents.

Exercice 5.18 *Equipotence* ❄ ❄ ❄
Déterminer des bijections telle que :

$$f_1 \in]0,1[^{[0,1]}, \qquad f_2 \in \mathbb{R}^{]0,1[}, \qquad f_3 \in (]0,1[^2)^{]0,1[}, \qquad f_4 \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}}$$

Relations binaires

Exercice 5.19 Que pouvez-vous dire de la relation binaire sur l'ensemble a,b,c,d définie par :

$\mathcal{R}$	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	1	1	1
c	1	0	1	1
d	0	0	0	1

Exercice 5.20 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E définie par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \ \{x,y\} \subset A \text{ ou } \{x,y\} \subset \overline{A}))$$

Montrer que R est une relation d'équivalence.
Décrire les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 5.21 *Nombre de relations d'équivalence*
Soit $\mathcal{R}_n$ le nombre de relation d'équivalence sur un ensemble à n éléments.
1. Trouver une relation de récurrence entre $\mathcal{R}_n$ et les $\mathcal{R}_k$, $k < n$.

2. Calculer $\mathcal{R}_n$ pour $n \leq 6$.
Rappel : $\binom{q}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments dans un ensemble de q éléments.
Indication : Fixer un élément et raisonner sur la taille de sa classe d'équivalence.