Espaces de dimension finie – Exercices

Dimension d'un sous-espaces vectoriels

Exercice 16.1 Soit $F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b+c & a-c \\ b & c-b & a+b+c \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Donner une base de F ainsi que sa dimension.
3. Quelles sont les coordonnées de $M(1,1,1)$ dans cette base ?

Exercice 16.2 Déterminer une base et la dimension des e.v. suivants :

1. $E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x - y + 2z = 0\right\}$,
2. $E_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = 2y \text{ et } z = x - t\right\}$,
3. $E_3 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \,:\, P(0) = P(1) = 0\right\}$,
4. $E_4 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \,:\, P(0) = P(1)\right\}$.

Exercice 16.3 Déterminer le rang de $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ où : $P_1 = X + 2$, $P_2 = X^3 - X^2 + 2X + 2$, $P_3 = X^3 - 2X^2$, $P_4 = X^2 + X$, $P_5 = X^2 - 2$.

Exercice 16.4 Soit $E_1 = \mathrm{Vect}(\mathrm{u}_1 = (1,2,1), \mathrm{v}_1 = (-1,0,1))$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\mathrm{u}_2 = (0,1,2), \mathrm{v}_2 = (-1,1,1))$.
Déterminer la dimension et une base de $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$.

Exercice 16.5 On note E l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que E est un sous-e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et en déterminer la dimension

Exercice 16.6 Donner une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 16.7
Soit F et G deux sous-espaces vectoriel de E de dimension finie.
Montrer que $\dim(F+G)^2 + \dim(F \cap G)^2 \geq \dim(F)^2 + \dim(G)^2$.
Étudier le cas d'égalité.
Indication : Chercher à factoriser en utilisant $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 16.8 Soient $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X];\ P(1) = P(-1) = 0\}$.
Donner une base de F, sa dimension et un supplémentaire dans E.
On pourra introduire la notion de division euclidienne.
⇛ Même question avec $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,:\, P(1) = P'(1)\}$.

Exercice 16.9 On définit les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: **Méthode**

$$a = (1,2,1,3),\ b = (3,3,2,6),\ c = (1,2,3,4),\ d = (-1,1,2,1).$$

1. Déterminer le rang de la famille (a,b,c,d) puis une base de $F = \mathrm{Vect(a,b,c,d)}$.
2. Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$ et en déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 16.10 **Méthode**
Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F_1 = \mathrm{Vect}\big(1 + \mathrm{X}, 1 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3\big)$

$$F_2 = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{X} - \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3\big) \text{ et } F_3 = \mathrm{Vect}\big(1 + \mathrm{X} - \mathrm{X}^3\big)$$

Donner une base de $F_1 + F_2 + F_3$.

Exercice 16.11
Soit $F = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{C}^5; x - iy + (3+i)z - 2t + (1-i)u = 0\}$.
Donner la dimension de F et en déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{C}^5$.

Exercice 16.12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H des sous-e.v. de dimensions finies.
1. Prouver l'inégalité :

$$\begin{aligned}\dim(F+G+H) \quad &\leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F\cap G) - \dim(F \cap H) \\ &\quad - \dim(G\cap H) + \dim(F\cap G\cap H)\end{aligned}$$

2. Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte.

Exercice 16.13 ❄❄
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sous-ev de E non trivial ($F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$). Montrer que F admet une infinité de supplémentaires dans E.

Exercice 16.14
Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux c'est-à-dire sans aucune racine commune. On note $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)$, $n = p+q-1$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$.

1. Donner la dimension de E.

2. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de E multiples de P est un sous-espace vectoriel de E.
Donner la dimension de F_P en fonction de n et p.

3. Montrer que $F_P \cap F_Q = \{0_E$.

4. En déduire que $E = F_P \oplus F_Q$ et qu'il existe $U, V \in E$ tels que $UP+VQ = 1$.

Exercice 16.15
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Prouver

$$\left.\begin{array}{r} H \subset F+G \\ \dim(H) = \dim(F) + \dim(G) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad H = F \oplus G$$

Exercice 16.16 ❄❄❄
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que, pour tous sous-espaces F et G de E, on a :

$$\dim(F) = \dim(G) \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ et } G \text{ ont un supplémentaire commun}$$

Indication : On pourra d'inspirer de la démonstration de la relation de Grassmann.
