Corrigé du DM 19

1. a) On sait déjà que $G \subset E$.
- $A^2 0 = 0 = -0$ donc $0 \in G$ ainsi $G \neq \emptyset$
- Soit $U, V \in G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$A^2(\alpha U + \beta V) = \alpha A^2 U + \beta A^2 V = \alpha(-U) + \beta(-V) = -(\alpha U + \beta V)$$

Ainsi, $\alpha U + \beta V \in G$

Par caractérisation, $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

b) Procédons pas analyse-synthèse :
- Analyse : Soit $M \in E$. On suppose qu'il existe $(U, V) \in F \times G$ tel que $M = U + V$.

On note que $AM = AU + AV = AV$ car $U \in F$. De plus $A^2 M = A^2 V = -V$ car $V \in G$.
Ainsi, $V = -A^2 M$ et $U = M - V = M + A^2 M$. Cela donne l'unicité de la décomposition sou l'hypothèse d'existence, i.e. : $F \oplus G$
- Synthèse : Soit $M \in E$, $V = -A^2 M$ et $U = M + A^2 M$. On vérifie que :
  - $U + V = M + A^2 M - A^2 M = M$
  - $AU = AM + A^3 M = AM - AM = 0$ car $A^3 = -A$; donc $U \in F$
  - $A^2 V = -A^4 M = -A(A^3 M) = -A(-AM) = A^2 M = -V$ donc $V \in G$

Cela donne l'existence de la décomposition, i.e. : $F + G = E$

Ainsi, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

2. a) Soit $U \in G$ alors $A^2(AU) = A^3 U = -AU$ car $A^3 = -A$ donc $AU \in G$ (en fait, ce résultat est vrai pour tout $U \in E$).

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } U \in G, \text{ on a } AU \in G.}$

b) Soit $U \in G\ \{0\}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha U + \beta AU = 0 \quad (1)$. Multipliant à gauche par A, il vient :

$$0 = A0 = A(\alpha U + \beta AU) = \alpha AU + \beta A^2 U =_{[\text{avec } U \in G]} \alpha AU - \beta U \quad (2)$$

Multipliant (1) par α et (2) par β, on obtient :

$$\alpha^2 U + \alpha\beta AU = 0 \text{ et } \alpha\beta AU - \beta^2 U = 0$$

Par différence, on a $\alpha^2 U + \beta^2 U = 0$ et donc $(\alpha^2 + \beta^2)U = 0$.
Or $U \neq 0$ donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et donc $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } U \in G \text{ est non nul, alors } (U, AU) \text{ est libre.}}$

c) Soit (U, V, AU) une famille libre de G. On sait d'après 2b) que $AV \in G$. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha U + \beta V + \gamma AU + \delta AV = 0 \quad (3)$$

Alors, procédant comme au 2b), il vient : $\alpha AU + \beta AV - \gamma U - \delta V = 0 \quad (4)$
L'opération $\beta(3) - \delta(4)$ donne

$$(\beta\alpha + \delta\gamma)U + (\beta^2 + \delta^2)V + (\beta\gamma - \delta\alpha)AU = 0$$

La famille (U, V, AU) est libre donc $\beta^2 + \delta^2 = 0$ donc $\beta = \delta = 0$.
La relation (5) devient : $\alpha U + \gamma AU = 0$. Pour la même raison, on obtient $\alpha = \gamma = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } (U, V, AU) \text{ est une famille libre de } G, \text{ alors } (U, V, AU, AV) \text{ l'est aussi.}}$

d) Montrons que l'on peut construire une base de G de la forme

$$\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_p, AU_1, AU_2, \ldots, AU_p) \text{ avec } (U_i)_{1\leq i\leq p} \in G^p$$

On sait de plus que le cardinale d'une famille libre est inférieur à la dimension de l'espace et donc $2p \leq n^2$ car $\dim(G) \leq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.
Procédons par itération finie sur $p \in \mathbb{N}^*$:

- Comme $G \neq \{0\}$, il existe $U_1 \in G$. D'après 2b) (U_1, AU_1) est libre dans G.
- Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{F} = (U_1, U_2, \ldots, U_q, AU_1, AU_2, \ldots, AU_q)$ libre dans G.

Soit la famille est génératrice de G, et donc c'est une base de G avec $\dim(G) = 2q \in 2\mathbb{N}$.
Soit la famille n'est pas génératrice. Alors il existe $U_{q+1} \in G\backslash\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et nous obtenons la nouvelle famille suivante libre dans G :

$$\mathcal{L} = (U_1, U_2, \ldots, U_q, U_{q+1}, AU_1, AU_2, \ldots, AU_q)$$

Montrons que la famille $(U_1, U_2, \ldots, U_q, U_{q+1}, AU_1, AU_2, \ldots, AU_q, AU_{q+1})$ est libre dans G.
D'après 2a), $AU_{q+1} \in G$. Soit $(\alpha_k)_{k\in[\![1,q+1]\!]}, (\beta_k)_{k\in[\![1,q+1]\!]} \in \mathbb{R}^{q+1}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{q+1} \alpha_k U_k + \sum_{k=1}^{q+1} \beta_k AU_k = 0 \quad (5)$$

Multipliant à gaucher par A et tenant compte que les $U_i \in G$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{q+1} \alpha_k AU_k - \sum_{k=1}^{q+1} \beta_k U_k = 0 \quad (6)$$

L'opération $\alpha_{q+1}(5) - \beta_{q+1}(6)$ permet d'éliminer le terme en AU_{q+1} :

$$\sum_{k=1}^{q+1} (\alpha_{q+1}\alpha_k + \beta_{q+1}\beta_k)U_k + \sum_{k=1}^{q} (\alpha_{q+1}\beta_k - \beta_{q+1}\alpha_k)AU_k = 0$$

Comme $\mathcal{L}$ est libre, alors les coefficients scalaires sont nuls, en particulier celui pour $k = q+1$ de la première somme :

$$\alpha_{q+1}^2 + \beta_{q+1}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{q+1} = \beta_{q+1} = 0$$

La relation (5) devient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \alpha_k U_k + \sum_{k=1}^{q} \beta_k AU_k = 0$.
Comme $\mathcal{L}$ est libre, les autres scalaires sont nuls et donc la famille étudiée est libre.

- Le procédé s'arrête puisque le cardinal d'une famille libre est bornée. La famille finale est libre, génératrice de G et comporte un nombre pair de vecteurs ce qui donne $\dim(G) \in 2\mathbb{N}$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } G \text{ est non réduit au vecteur nul, } G \text{ est de dimension paire.}}$