# DM 21

à rendre le mardi 23 avril 2024

## Application linéaire

Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que :

$$(a, f(a), f^2(a)) \text{ est une base de } E \text{ et que } \; f^3(a) = a$$

1. a) Montrer que $f^3 = \mathrm{Id}_E$, autrement dit : pour tout $x \in E,\; f(f(f(x))) = x$.

b) En déduire que $f$ est un automorphisme de $E$ et déterminer son automorphisme réciproque.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda$ l'ensemble des solutions dans $E$ de $f(x) = \lambda x$.

a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'équation $f(x) = \lambda x$ admette (au moins) une solution non nulle. Montrer alors que $\lambda$ est racine cubique de l'unité.

c) Soit $\lambda$ une racine cubique de l'unité. Trouver un vecteur $x_\lambda \in E$ tel que $E_\lambda = \mathrm{Vect}(x_\lambda)$ (on déterminera $x_\lambda$ par ses coordonnées dans la base $(a, f(a), f^2(a))$).

## Intégration sur un segment

Soit $F$ la fonction définie par :

$$F(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \quad \text{si } x \in ]0,1[, \qquad F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(1) = \ln(2)$$

1. Vérifier que $F$ est bien définie et positive sur $[0,1]$. Justifier que $F$ n'est pas définie sur $[-1,0[$.

2. a) Pour tout $x \in ]0,1[$, montrer que :

$$\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = -\ln(2)$$

b) Montrer que, pour tout $x \in ]0,1[$ :

$$x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$$

3. a) Montrer que $F$ est dérivable sur $]0,1[$.

b) Montrer que $F$ est continue sur $[0,1]$.

c) Calculer $F'$ sur $]0,1[$. En déduire sur $F'$ est continue sur $[0,1]$.

4. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.