DM 22

à rendre le jeudi 2 mai 2024

Lancers d'une pièce

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q.
On lance cette pièce successivement et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- on a obtenu Pile ;
- on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au k-ième lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus.
On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n .

a) Pour tout k de $[\![1; n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbf{P}(T_n = k)$.
b) Déterminer $\mathbf{P}\left(T_n = n\right)$.
c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(T_n = k\right) = 1$.
d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E\left(T_n\right) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2. Loi de X_n .

a) Donner la loi de X_n .
b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n .

a) Déterminer, pour tout k de $[\![0; n-1]\!]$, la probabilité $\mathbf{P}(Y_n = k)$.
b) Déterminer $\mathbf{P}(Y_n = n)$.
c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E\left(Y_n\right)$.