Corrigé du DM 22

Lancers d'une pièce

1. Étude de T_n : on note que $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$

a) On note que $\mathbf{P}([T_n = 1]) = \mathbf{P}(P_1) = p$.
Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$,

$$[T_n = k] = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

La formule des probabilités composées, où l'hypothèse $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k-1} F_j\right) > 0$ est vérifiée par construction de ladite formule, donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_n = k) &= \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}_{F_1}(F_2)\ldots\mathbf{P}_{\bigcap\limits_{j=1}^{k-2} F_j}(F_{k-1})\mathbf{P}_{\bigcap\limits_{j=1}^{k-1} F_j}(P_k) \\ &= q^{k-1}p \end{aligned}$$

La formule reste valide pour $k = 1$.
Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbf{P}(T_n = k) = q^{k-1}p}$.

b) Deux situations conduisent à effectuer n lancers :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_n = n) &= \mathbf{P}\left((F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)\right) \\ &\qquad \text{par incompatibilité des évènements} \\ &= \mathbf{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n\right) + \mathbf{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n\right) \\ &\qquad \text{par la formule des probabilités composées} \\ &= q^n + q^{n-1}p \\ &= q^{n-1}(q+p) = q^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(T_n = n) = q^{n-1}}$.

⇛ *On pouvait aussi montrer que* $[T_n = n] = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1}$.

c) On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T_n = k) &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p + q^{n-1} \\ &= p\sum_{j=0}^{n-2} q^j + q^{n-1} \quad \text{par changement d'indice } \boxed{j = k-1} \\ &= p\frac{1 - q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} \text{ car } p = 1 - q \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T_n = k) = 1}$.

d) T_n étant une variable aléatoire finie, elle admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(T_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1} \end{aligned}$$

⇛ *Méthode 1 : faire une récurrence pour $n \geq 2$. A faire en exercice.*
Méthode 2 : utiliser une fonction ad-hoc

Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}$:

Posons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} \end{array} \right.$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} = \varphi(q)$. Pour $x \in]0,1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)' = \frac{-nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2}$$

On obtient donc :

$$\mathbf{E}(T_n) = p\frac{-nq^{n-1}(1-q)+1-q^n}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = -nq^{n-1} + \frac{1-q^n}{1-q} + nq^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2,\ \mathbf{E}(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}}$

2. Étude de X_n : on note que $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ donc X_n suit une loi de Bernoulli.

a) Le plus simple est de déterminer $\mathbf{P}(X_n = 0)$ en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) = q^n$$

On en déduit $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - q^n$.

x	0	1
$\mathbf{P}(X_n = x)$	q^n	$1-q^n$

et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^n)$

b) On a bien $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = 1 - q^n}$.

3. Étude de Y_n : on note que $Y_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

a) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, la formule des probabilités composées donne

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}) = q^k p$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \mathbf{P}(Y_n = k) = q^k p}$.
⇛ *On aurait pu traiter séparément le cas $k = 0$.*

b) On a $\boxed{\mathbf{P}(Y_n = n) = \mathbf{P}(X_n = 0) = q^n}$.

c) Le nombre total de lancers est égal à la somme du nombre de Pile et de Face obtenus.

$$\boxed{T_n = X_n + Y_n}$$

Ainsi, $Y_n = T_n - X_n$ et

$$\mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(T_n) - \mathbf{E}(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}}$.