Colle 24

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Attention ! Lors de cette colle, un exercice pourra porter sur le chapitre des applications linéaires.

Extrait du programme

1. Probabilités

1. Probabilités sur un univers fini

d. Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X de la variable aléatoire X à valeur dans E.	La probabilité $\mathbf{P}_X$ est déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbf{P}(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim g(X)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $\mathbf{P}(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

2. Espérance et variance

a. Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Espérance $\mathbf{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.
Formule de transfert : $\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X=x)$.	

b. Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$. Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale.	

c. Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration.

Méthodes et savoir-faire

- Identifier une loi usuelle
- Appliquer la formule de transfert
- Mettre en place l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Questions de cours

➜ Définition d'une vad finie, notations des évènements liés à un v.a., système complet associé, définition et propriétés de la loi de probabilité et de la fonction de répartition, expliciter la correspondance entre la loi de probabilité et la fonction répartition.

➜ Espérance d'une vad finie. Propriétés. Formule de transfert.

➜ Moments et moments centrés d'ordre $r \in \mathbb{N}$. Variance. Écart-type. Formule de Koenig-Huygens et inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

★ Formule de transfert.

★ Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

★ Les lois usuelles : uniforme, Bernoulli (+ notion avec une indicatrice), binomiale.

- définition de la loi
- modélisation
- exemple
- espérance et variance (démo)

★ Fonction génératrice

Soit X une vad finie telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On pose $G_X : s \mapsto \mathbf{E}(s^X) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

a) Exprimer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

b) Calculer G_X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Retrouver ainsi $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

★ Loi du maximum

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue k tirages **sans** remise. Soit X la vad finie égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

b) Même question si les tirages s'effectuent **avec** remise.

★ Jeu répétitif

Un joueur parie à la roulette : il décide de jouer 1 euro sur une couleur (rouge ou noir) à chaque partie. Le plateau contient 37 cases : 18 rouges, 18 noires, et 1 verte. Si la couleur choisie sort, il gagne 1 euro et récupère sa mise, sinon, il perd sa mise. Soit X_n le gain du joueur après n parties :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si le joueur remporte la } (n+1)\text{-ième partie,} \\ X_n - 1 & \text{si le joueur perd la } (n+1)\text{-ième partie.} \end{cases}$$

a) Soit Y_n le nombre de parties gagnées.
Donner la loi de Y_n. en déduire la loi de X_n.

b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.

c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une estimation (par excès) du plus petit entier n tel que :

$$P(X_n < 0) \geq 95\%$$

On exprimera n en fonction de $p = \dfrac{18}{37}$ et $q = 1 - p$.