Corrigé du DM 23

Entropie d'une variable aléatoire

Partie A - Premiers exemples

1. a) Soit $x \in X(\Omega)$, alors

$$\mathbf{P}[X=x] \in]0,1] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}[X=x] \ln\big(\mathbf{P}[X=x]\big) \leq 0$$

Par sommation $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}[X=x] \ln\big(\mathbf{P}[X=x]\big) \leq 0$ et donc $\boxed{\mathcal{H}(X) \geq 0.}$

b) Procédons par double implication :

- $\boxed{\Leftarrow}$ si $X(\omega) = \{a\}$ alors $\mathbf{P}(X=a) = 1$ et $\mathcal{H}(X) = -1\ln(1) = 0$
- $\boxed{\Rightarrow}$ raisonnons par contraposition : soit $n \geq 1$ et $X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ et $\mathbf{P}(X=x_1) \in]0,1]$.

Par sommation de termes de même signe on a :

$$\mathcal{H}(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{P}(X=x_1) \ln\big(\mathbf{P}(X=x_1)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\big(\mathbf{P}(X=x_1)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(X=x_1) = 1$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ est constante.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$. Donc $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \dfrac{1}{n+1}$ alors :

$$h_n = \mathcal{H}(X) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n+1}{n+1} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(n+1)$$

Ainsi, $\boxed{h_n = \ln(n+1)}$.

3. Soit $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

a) On a $\boxed{f(p) = \mathcal{H}(X) = -(1-p)\ln(1-p) - p\ln(p)}$.

b) f est dérivable sur $]0,1[$

$$f'(p) = \ln(1-p) + \frac{1-p}{1-p} + \ln(p) - \frac{p}{p} = \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

Ainsi $f'(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1-p}{p} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1-p = p \quad \Leftrightarrow \quad p = \dfrac{1}{2}$

et $f'(p) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1-p}{p} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1-p > p \quad \Leftrightarrow \quad p < \dfrac{1}{2}$.

Le tableau de variation de f est :

p	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Avec $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} = \ln(2)$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un maximum (global) en } \dfrac{1}{2} \text{ par la valeur } \ln(2)}$.

c) Comme $h_1 = \ln(2)$ alors $\boxed{\text{pour tout } p \in]0,1[,\ f(p) \leq h_1}$.

Partie B - Entropie de la loi du premier succès

4. a) On a $\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

b) Notons P_i l'évènement "Pile sort lors du ième lancer" et $F_i = \overline{P_i}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=0) &= \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\Big) \\ &\quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(F_i) = \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \mathbf{P}\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\Big) \cap P_k\Big) \\ &\quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(F_i)\Big)\mathbf{P}(P_k) = \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(X=0) = \frac{1}{2^n} \text{ et pour tout } k \in [\![1, n]\!]\ \mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{2^k}}$.

c)(i) Simulation de la variable X :

```python
from numpy.random import rand

def X(n):
    r=rand()
    y=1
    while r>0.5 and y<n:
        r=rand()
        y=y+1
    if y==n and r>0.5:
        return 0
    else:
        return y
```

(ii) Le test `r>0.5` induit qu'un nouveau lancer doit être effectué, avec une probabilité 0.5 ($\mathbf{P}(r \in]0.5, 1[) = 0.5$) : $\boxed{\text{le test traduit l'obtention d'un Face}}$.

5. a) Soit $x \in]0, 1[$, alors $\boxed{F(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$.

La fonction F est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
En particulier $\boxed{F \text{ est dérivable sur }]0, 1[}$.

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} \text{ et } F'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0, 1[,\ F'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$.

b) D'après la loi définie à la question B1), on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X) &= \underbrace{-\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{1}{2^n}\right)}_{k=0} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\ln\frac{1}{2^k} \\
&= \ln(2)\left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}\right) \\
&= \ln(2)\left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2}F'\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \ln(2)\left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\right) \\
&= \frac{\ln(2)}{2^n}\left(n + n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) \\
&= \ln(4)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}(X) = \ln(4)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$.

c) On note que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}(X) \leq h_n}$ et même que $\mathcal{H}(X) \underset{n\to+\infty}{=} o(h_n)$.
La croissance du logarithme donne les résultats pour $n \geq 3$.
Pour $n = 2$, $\mathcal{H}(X) = \frac{3}{4}\ln(4) < \ln(3)$.
Pour $n = 1$, $\mathcal{H}(X) = \ln(2) = h_1$.