Corrigé du DM 24

Partie A

1. On trouve $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Vérification du coefficient $(2, 3)$ de A^2 : $a_{2,1}a_{1,3} + a_{2,2}a_{2,3} + a_{2,3}a_{3,3} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$

De plus, $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$.

Ainsi, $\boxed{A^3 = A^3 + 2A}$.

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha A + \beta A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ $\quad (\bigstar)$. Alors :

$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (A, A^2) \text{ est libre dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$.

- Initialisation : la famille (A, A^2) étant libre, la décomposition de A et de A^2 est unique : $a_1 = b_2 = 1$ et $b_1 = a_2 = 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vérifiées.
- Hérédité : soit $n \geq 2$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Considérons A^{n+1} :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n = A\left(a_n A + b_n A^2\right) \\ &= a_n A^2 + b_n A^3 \\ &= a_n A^2 + b_n\left(A^2 + 2A\right) \\ &= 2b_n A + (a_n + b_n)A^2 \end{aligned}$$

  On pose $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+2} = a_n + b_n$. Ainsi, on obtient l'existence de la décomposition : $A^{n+1} \in \text{Vect}(A, A^2)$. De plus, (A, A^2) est libre donc la décomposition est unique. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
- Conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2;\ A^n = a_n A + b_n A^2 \text{ avec } a_{n+1} = 2b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + b_n}$.

4. Une fonction Python `suites(n)` qui calcule et retourne a_n et b_n pour le paramètre d'entrée $n \in \mathbb{N}^*$:

```python
def suites(n):
    a,b=1,0
    for k in range(2,n+1):
        a,b=2*b,a+b
    return a,b
```

Exemple d'exécution :

```
>>> suites(8)
(42, 43)
```

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après les relations trouvées en A3), on a :

$$a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2a_n + 2b_n = 2a_n + a_{n+1}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.}$

b) La suite (a_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

- son équation caractéristique est : $X^2 - X - 2 = 0$
- son discriminant est : $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$
- les racines sont : $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = -1$.
- ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$$

- en particulier, pour $n = 1$ et $n = 2$ on trouve :

$$\left\{\begin{array}{r} 2\alpha - \beta = a_1 = 1 \\ 4\alpha + b = a_2 = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} 2\alpha - \beta = a_1 = 1 \\ 6\alpha = 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{r} \beta = \frac{2}{6} - 1 = -\frac{2}{3} \\ \alpha = \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

- et donc $a_n = \dfrac{1}{6}2^n - \dfrac{2}{3}(-1)^n = \dfrac{1}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3}(-1)^{n-1}$
- et $b_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1} = \dfrac{1}{3}2^{n-1} + \dfrac{}{3}(-1)^n$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{1}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3}(-1)^{n-1} \text{ et } b_n = \dfrac{1}{3}2^{n-1} + \dfrac{1}{3}(-1)^n}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = a_n A + b_n A^2$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \left(\dfrac{1}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3}(-1)^{n-1}\right)A + \left(\dfrac{1}{3}2^{n-1} + \dfrac{1}{3}(-1)^n\right)A^2.}$

Partie B

6. Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ alors :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

La famille obtenue est génératrice ; de plus, elle est échelonnée donc libre.

Ainsi, $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Im}\,(f) \text{ est } \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) \text{ ou encore } (e_1 + e_2 + e_3, e_1) \text{ et } \mathrm{rg}(f) = 2.}$

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ alors f n'est pas surjective et donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

7. ➜ Cherchons un base de $\mathrm{Ker}\,(f)$:

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} y = -z \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

➜ Déterminons le rang d'une famille obtenue par juxtaposition d'une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$; utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =_{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =_{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

Donc cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ (son rang égale son cardinal induit qu'elle est libre ; son rang vaut $3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$).
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3 : \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^3.}$

8. Calculons le rang de $\mathcal{C}$ (les coordonnées des vecteurs sont données dans la base canonique $\mathcal{B}$) :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Comme $\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \mathrm{Card}(\mathcal{C})$ alors $\mathcal{C}$ est libre ; comme $\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ alors $\mathcal{C}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

9. Voici deux approches pour cette question :

• Méthode astucieuse : ⇛ *En général, le changement de base permet d'avoir une écrire plus simple de la matrice, souvent il s'agit de la diagonaliser et donc les images des vecteurs de la nouvelle base sont respectivement proportionnelles aux vecteurs.*

Déterminons les coordonnées de $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$f(x_1) = A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$
$$f(x_2) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$
$$f(x_3) = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

• Méthode calculatoire : il s'agit d'effectuer une changement de base.

On pose $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}AP$.

Après avoir calculer P^{-1} et effectuer les produits AP et $P^{-1}(AP)$ on trouve le même résultat.

10. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, posons $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$.

Dans la base $\mathcal{C}$, l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donne :

$$\begin{aligned}
f\circ g+g\circ f=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)+\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)=O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}0 & -b & 2c\\ 0 & -e & 2f\\ 0 & -h & 2j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -d & -e & -f\\ 2g & 2h & 2j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}0=0\\ -b+0=0\\ 2c+0=0\end{cases} \text{ et } \begin{cases}0+d=0\\ -e-e=0\\ 2f-f=0\end{cases} \text{ et } \begin{cases}0+2g=0\\ -h+2h=0\\ 2j+2j=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad b=c=d=e=f=g=h=j=0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f\circ g+g\circ f=0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\alpha\in\mathbb{R};\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.}$