DM 24

à rendre le mardi 14 mai 2024

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 3 et on considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$A^n = a_n A + b_n A^2,$$

et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. Écrire une fonction Python `suites(n)` qui calcule et retourne a_n et b_n pour le paramètre d'entrée $n \in \mathbb{N}^*$.
5. a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$

b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie B

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est A.

6. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et en déduire le rang de f. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
7. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
8. On considère les vecteurs suivants :

$$x_1 = e_2 - e_3, \quad x_2 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x_3 = 2e_1 + e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{C} = (x_1, x_2, x_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

9. Déterminer la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{C}$.
10. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \circ g + g \circ f = 0$,

(ii) il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.