Colle 26

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

1. Matrices

1. Matrices et applications linéaires

a. Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.

b. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	

c. Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

2. Changements de bases, équivalence et similitude

a. Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

b. Matrices équivalentes et rang

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r,il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.

c. Matrices semblables et trace

Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, invariance par similitude.	Notations $\operatorname{tr}(A)$
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\operatorname{tr}(uv) = \operatorname{tr}(vu)$.	Notations $\operatorname{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

Méthodes et savoir-faire

- Donner la matrice d'une application linéaire
- Calculer le rang d'une matrice
- Effectuer un changement de base

Questions de cours

➜ Matrice d'une famille de vecteurs. Exemple. Rappeler la détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Matrice d'une application linéaire. Exemples. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Application canoniquement associée à une matrice, noyau et image. Matrice de passage. Formule de changement de base

★ Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

★ Image d'un vecteur par une application linéaire. Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires.

★ Structure affine de l'espace des solutions d'une système linéaire.

➜ Définition du rang d'une matrice, lien avec celui d'une famille de vecteur ou d'une application linéaire, propriétés (incluant les matrices équivalentes, la transposition et les matrices extraites).

★ Formules de changement de bases

➜ Matrices semblables, propriétés et caractérisation comme matrices d'un même endomorphisme.

➜ Trace d'une matrice, propriétés, trace d'un endomorphisme.

★ Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie telle que la matrice d'un projecteur est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

★ Matrices équivalentes, caractérisation comme matrices d'un même endomorphisme, caractérisation par le rang.

➜ Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang d'un matrice par les matrices carrées extraites.

★ Si une application linéaire est de rang r alors il existe deux bases où sa matrice est J_r.

★ Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r, alors tout sous-matrice de M est de rang au plus r et on peut trouver une sous-matrice de M dont le rang est r.