DS 10

Mercredi 24 avril 2024 – durée : 4 h

Exercice 1 - Questions courtes

1. Le jeu à gratter "goal"
   Dans une urne de huit boules numérotées de un à huit, on tire successivement, avec remise, six boules. On considère que le tirage est gagnant dés lors que parmi les 5 derniers numéros, deux au moins sont identiques au numéro de la première boule.
   a) Combien de tirages différents existe-t-il ?
   b) Combien de tirages gagnants existe-t-il ?

2. Donner des développements en éléments simples des fractions suivantes :
   - Sur $\mathbb{C}$: $\dfrac{X}{(X+1)(X+i)^2}$
   - Sur $\mathbb{R}$: $\dfrac{1+X}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
   - Sur $\mathbb{R}$: $\dfrac{2X^5}{(X^2+1)^2}$

3. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{\tan(x)\ln(1+x)}{\cos(x)-1}$$
   Quel est l'ensemble de définition de f ?
   Démontrer que f se prolonge par continuité en une fonction dérivable en 0.
   Identifier l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente.

4. Résoudre :
   - $\mathcal{E}_1 \ : \ y' - \dfrac{1}{t\ln(t)}y = \dfrac{\ln^2(t)}{t}\cos\left(\ln^2(t)\right)$ sur $]e,+\infty[$
   - $\mathcal{E}_2 \ : \ y'' - 2y' + 2y = e^t\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 - Une symétrie

On considère les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$\begin{array}{ll} I(x,y,z,t) = (x,y,z,t) \quad \text{ainsi } I = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} & K(x,y,z,t) = (-z,-t,x,y) \\ J(x,y,z,t) = (-y,x,t,-z) & L(x,y,z,t) = (t,-z,y,-x) \end{array}$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (I,J,K,L) et Id_E l'endomorphisme identité de E.
On pose $S = J + K$.

1. a) Vérifier que $J \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. On admet que K et L sont également des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$.
   b) De quel espace vectoriel usuel, E est-il un sous-espace vectoriel ?
   c) Montrer que (I,J,K,L) est une base de E.

2. a) Exprimer $J \circ K$, $K \circ L$ et $L \circ J$ en fonction respectivement de L, J et K.

   b) Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $K \circ J = -L$, $L \circ K = -J$ et $J \circ L = -K$.

   c) En déduire que E est stable par composition, c'est-à-dire que

$$(A, B) \in E^2 \quad \Rightarrow \quad A \circ B \in E$$

3. Donner le script de la fonction `S(x,y,z,t)` qui retourne $S(x, y, z, t)$:
4. Calculer S^2. En déduire que S est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ et exprimer S^{-1} en fonction de S.

5. On considère maintenant l'application φ qui à tout M élément de E associe :

$$\varphi(M) = S \circ M \circ S^{-1}$$

   a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

   b) Montrer que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$.

   c) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.
   Il s'agit de redémontrer un point de cours.

   d) Montrer que φ est une symétrie.
   Il s'agit de redémontrer un point de cours.

   e) Considérons ψ la projection sur $\mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.
   Donner une expression de ψ en fonction de φ.

   f) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 3 - Marche aléatoire

Soit N un entier supérieur ou égal à 2, $n \in [\![0, N]\!]$ et $(p, q) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $p + q = 1$.

On considère une puce placée sur une droite, qui se déplace de façon aléatoire vers la gauche ou la droite. À chaque instant, la probabilité pour qu'elle se déplace d'une unité vers la droite est p, la probabilité qu'elle se déplace d'une unité vers la gauche est q.

La puce est placée initialement au point $n \in [\![0, N]\!]$. Elle s'arrête définitivement dès qu'elle atteint une extrémité de l'intervalle (0 ou N). On note a_n la probabilité pour que, partant de n la puce s'arrête en 0, b_n la probabilité pour qu'elle s'arrête en N.

1. Justifier que $a_0 = 1$ et $a_N = 0$.
   Calculer de même b_0 et b_N.
2. Démontrer que, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, $a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$
   Quelle relation a-t-on entre b_n, b_{n+1} et b_{n-1} ?
3. Démontrer que l'ensemble E des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$$

   est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Démontrer que l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ qui à $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe (u_0, u_1) est un isomorphisme.
   En déduire que E est de dimension finie et identifier $\dim(E)$.
5. Démontrer que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E (avec $\lambda \neq 0$) si et seulement si $\lambda = p\lambda^2 + q$.
6. En remarquant que $\lambda = 1$ est une solution évidente de l'équation précédente, en déduire les suites géométriques appartenant à E puis en déduire une base de E lorsque $p \neq \frac{1}{2}$.
   En déduire a_n lorsque $p \neq \frac{1}{2}$.

7. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, démontrer que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E puis en déduire une base de E. En déduire a_n lorsque $p = \frac{1}{2}$.
8. Démontrer que $\sigma_n = a_n + b_n$ vérifie :

$$\begin{cases} & \sigma_0 = \sigma_N = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & \sigma_n = p\sigma_{n+1} + q\sigma_{n-1} \end{cases}$$

En déduire σ_n.
Quelle est la probabilité que la puce ne s'arrête jamais ?

Exercice 4 - Décomposition d'un rationnel en éléments simples

Le but de cet exercice est de décomposer un rationnel en éléments simples :

Définition – **Élément simple**

Un rationnel r est un élément simple *si $r \in \mathbb{Z}$ ou si $r = \dfrac{a}{p^k}$ avec p nombre premier, $k \geq 1$ et $a \in [\![0, p-1]\!]$.*

1. Rappeler l'identité de Bezout lorsque b et c sont deux entiers premiers entre eux.
2. Soit p un nombre premier, k, n, q trois entiers tels que n et q sont premiers avec p. Déduire de la relation de Bezout entre q et p^k qu'il existe un couple d'entiers (ℓ, m) tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{n}{p^k q} = \dfrac{\ell}{p^k} + \dfrac{m}{q} \\ 1 \leq \ell \leq p^k - 1 \end{cases}$$

Méthode

En décomposant ℓ dans la base p : $\ell = \ell_k + \ell_{k-1}p + \cdots + \ell_1 p^{k-1}$ avec $\ell_i \in [\![0, p-1]\!]$ pour tout i, on peut ainsi décomposer $\dfrac{\ell}{p^k}$ en éléments simples lorsque $0 \leq \ell \leq p^k - 1$:

$$\frac{\ell}{p^k} = \frac{\ell_1}{p} + \frac{\ell_2}{p^2} + \cdots + \frac{\ell_k}{p^k}$$

En décomposant le dénominateur d'un rationnel r en produit de facteurs premiers, on peut ainsi démontrer par récurrence sur le nombre de facteurs premiers du dénominateur que r se décompose comme somme d'éléments simples.
Exemples de décomposition :

$$\frac{1}{230} = \frac{1}{2\times 5\times 23} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{7}{23} \qquad \frac{23}{8} = 2 + \frac{4+2+1}{8} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad -\frac{23}{8} = -3 + \frac{1}{8}$$

3. Décomposer en éléments simples : $\dfrac{31}{9}$ et $-\dfrac{31}{9}$.
4. Décomposer en éléments simples : $r = \dfrac{2}{315} = \dfrac{2}{3^2\times 5\times 7}$

Indication : On pourra procéder dans l'ordre suivant :

(i) Déterminer $a \in [\![1, 8]\!]$ et $b \in \mathbb{Z}$ tel que $r = \dfrac{a}{9} + \dfrac{b}{35}$
(ii) Décomposer en élément simple $\dfrac{a}{9}$.
(iii) Déterminer $c \in [\![1, 4]\!]$ et $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{b}{35} = \dfrac{c}{5} + \dfrac{d}{7}$.
(iv) Décomposer en élément simple $\dfrac{d}{7}$.
(v) Conclure.

Problème 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(f(x)\big)^n \mathrm{d}x.$$

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A – Étude de la bijection réciproque de f

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que pour tout $x \in J$: $\cos\big(f^{-1}(x)\big) = \dfrac{1}{x}$ et $\sin\big(f^{-1}(x)\big) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad \big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie B – Étude des dérivées successives de f

6. Justifier que f est de classe C^∞ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.
7. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$$

et que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$

8. Déterminer les polynômes P_1 et P_2. En déduire le polynôme P_3.
9. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$$

Partie C – Étude de la suite d'intégrales

11. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.
12. Déterminer les réels a et b, tels que : $\quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.
13. En posant $t = \sin(x)$, déterminer I_1.
14. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
15. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+2} = \dfrac{\big(\sqrt{2}\big)^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} I_n.$
16. En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition de corrigé du devoir surveillé 10

Exercice 1 - Questions courtes

1. Les tirages des boules sont successifs donc il y a de l'ordre. Les tirages se font avec remise, donc il y a de la répétition. Ainsi, un tirage est une 6-liste dans l'ensemble des 8 boules.

   a) Il y a 8^6 tirages possibles.

   b) Le nombre de façons de choisir la première boule est : 8.
   Ensuite, parmi les 5 suivantes il s'agit de dénombrer les tirages qui donneront au moins 2 numéros identiques à celui de la première boule. Il y a deux approches possibles :

   Méthode descriptive : Il s'agit de discuter suivant le nombre de répétitions de ce numéro afin d'obtenir des ensembles disjoints dont il sera facile de calcul le cardinal de la réunion. Ce nombre peut varier de 2 à 5 :

   - Avec exactement 2 répétitions :

     - Choisissons les places de ces répétitions : il s'agit de choisir deux places parmi les cinq. Comme il n'y a qu'un numéro par place (on tire une boule après l'autre) alors il n'y a pas de répétition. Comme aux deux tirages on pioche la même boule, celle du "premier tirage" de référence alors il n'y a pas d'ordre. Il s'agit donc d'une combinaison de 2 places parmi les 5. Il y a $\binom{5}{2}$ possibilités.
     - Choisissons les boules tirées sur les 3 places restantes : à chaque tirage, nous avons le choix entre les 7 boules autres que celle du début, c'est une 3-liste sur ces 7 boules. Il y a 7^3 possibilités.

     Ainsi, il y a $\binom{5}{2}7^3$ façon de compléter le tirage initial.

   - Avec exactement 3 répétitions : Il y a $\binom{5}{3}7^2$ possibilités
   - Avec exactement 4 répétitions : Il y a $\binom{5}{4}7$ possibilités
   - Avec exactement 5 répétitions : Il y a $\binom{5}{5} = 1$ possibilités

   Ainsi le nombre de tirages gagnants est : $\boxed{8\left(\binom{5}{2}7^3 + \binom{5}{3}7^2 + \binom{5}{4}7 + 1\right)}$

   Méthode utilisant le complémentaire : Ces tirages sont ceux où la boule ressort au plus une fois :

   - La boule ne ressort pas : Il s'agit de piocher à chaque fois parmi les 7 autres boules, c'est une 5-liste sur ces 7 boules. il y a 7^5 possibilités.
   - Avec exactement 1 répétition : Il y a $\binom{5}{1}7^4$ possibilités

   Ainsi le nombre de tirages gagnants est : $\boxed{8^6 - 8\left(7^5 + \binom{5}{1}7^4\right)}$

   Remarque : Le lien entre ceux deux expressions égalent est la formule du binôme de Newton !

$$8^6 = 8(7+1)^5 = 8\left(7^5 + \binom{5}{1}7^4 + \binom{5}{2}7^3 + \binom{5}{3}7^2 + \binom{5}{4}7 + \binom{5}{1}\right)$$

2. Développements en éléments simples de fractions :

➤ Sur $\mathbb{C}$: $F = \dfrac{X}{(X+1)(X+i)^2}$
Comme $\deg(F) = 1-3 = -2$, la partie entière est nulle. Il existe : $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{(X+i)^2}$$

La méthode du cache donne :

- $a = \big((X+1)F\big)_{(-1)} = \left(\dfrac{X}{(X+i)^2}\right)_{(-1)} = \dfrac{-1}{(-1+i)^2} = -\dfrac{(-1-i)^2}{4} = -\dfrac{2i}{4} = -\dfrac{i}{2}$
- $c = \big((X+i)^2F\big)_{(-i)} = \left(\dfrac{X}{X+1}\right)_{(-i)} = \dfrac{-i}{1-i} = \dfrac{-i(1+i)}{2} = \dfrac{1-i}{2}$

La limite quand x (réel) tend vers $+\infty$ de $xF(x)$ donne :

$$\lim_{x\to\infty} xF(x) = 0 = a + b \quad \Rightarrow \quad b = -a = \frac{i}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\dfrac{X}{(X+1)(X+i)^2} = -\dfrac{i}{2(1+X)} + \dfrac{i}{2(X+i)} + \dfrac{1-i}{2(X+i)^2}.}$

➤ Sur $\mathbb{R}$: $G = \dfrac{1+X}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ Comme $\deg(G) = 1-3 = -2$, la partie entière est nulle.
Il existe : $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$G = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$$

La méthode du cache donne :

- $a = \big((X-1)G\big)_{(1)} = \left(\dfrac{X+1}{(X-2)(X-3)}\right)_{(1)} = \dfrac{2}{(-1)(-2)} = 1$
- $b = \big((X-2)G\big)_{(2)} = \left(\dfrac{X+1}{(X-1)(X-3)}\right)_{(1)} = \dfrac{3}{1(-1)} = -3$
- $c = \big((X-3)G\big)_{(3)} = \left(\dfrac{X+1}{(X-1)(X-2)}\right)_{(1)} = \dfrac{4}{(2)(1)} = 2$

Ainsi, $\boxed{G = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{-3}{X-2} + \dfrac{2}{X-3}.}$

➤ Sur $\mathbb{R}$: $H = \dfrac{2X^5}{(X^2+1)^2}$ On peut déterminer le développement sur $\mathbb{C}$ puis le ramener sur $\mathbb{R}$, ou directement le déterminer sur $\mathbb{R}$.
Comme $\deg(H) = 5-4 = 1$, la partie entière est de degré 1. Il existe : $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tel que :

$$H = aX + b + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}$$

La division euclidienne donne :

$$\begin{array}{rrr|l} 2X^5 & & & X^4+2X^2+1 \\ \cline{4-4} -(2X^5 & +4X^3 & +2X) & 2X \\ \cline{1-3} & -4X^3 & -2X & \end{array}$$

Donc $a = 2$ et $b = 0$. Notons $H_1 = \dfrac{-4X^3-2X}{(X^2+1)^2}$.
La méthode du cache donne :

- $ei + f = \big((X^2+1)^2H_1\big)_{(i)} = \big(-4X^3-2X\big)_{(i)} = -4i^3 - 2i = 2i$ donc $e = 2$ et $f = 0$.

La limite quand x (réel) tend vers $+\infty$ de $xH(x)$ donne :

$$xH(x) \sim_{+\infty} -4 \sim_{\infty} c$$

Enfin, une évaluation en 0 donne :

$$H(0) = 0 = d + f \quad \Rightarrow \quad d = -f = 0$$

Ainsi, $\boxed{\dfrac{2X^5}{(X^2+1)^2} = 2X - \dfrac{4X}{X^2+1} + \dfrac{2X}{(X^2+1)^2}.}$

3. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\tan(x)\ln(1+x)}{\cos(x)-1}$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}; x \in \mathcal{D}_{\tan},\ 1 + x \in \mathcal{D}_{\ln}\ et \cos(x) \neq 1\}$$

On a $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $1 + x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$ et $\cos^{-1}(\{0\}) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \left]-1, +\infty\right[\backslash \left(2\pi\mathbb{Z} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}\right).}$

Pour établir le reste de la réponse, le mise en évidence d'un développement limité d'ordre 1 en 0 et la connaissance du prochain terme non nul donnera toutes les informations utiles. Travaillons à calculer un $DL_2(0)$ de f.

Comme $cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, il convient de considérer un développement limité d'ordre 4 des différentes expressions constituant f. Comme $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ alors un $DL_3(0)$ devrait suffire en procédant judicieusement !

$$\begin{aligned}
cos(x) - 1 &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) - 1 \\
&\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)\right) \\
\tan(x) &\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\ln(1+x) &\underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\frac{\tan(x)\ln(1+x)}{-\frac{x^2}{2}} &= -2\frac{\tan(x)}{x}\frac{\ln(1+x)}{x} \\
&\underset{0}{=} -2\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
&\underset{0}{=} -2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} -2 + x - \frac{4x^2}{3} + o(x^2) \\
\text{enfin } \left(1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)\right) &\underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \\
\text{donc } f(x) &\underset{0}{=} \left(-2 + x - \frac{4x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\
&\underset{0}{=} -2 + x - \frac{4x^2}{3} - 2\frac{x^2}{12} + o(x^2) \\
&\underset{0}{=} -2 + x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'existence d'une développement limité d'ordre 1 de f en 0 donne f se prolonge donc par continuité en une fonction dérivable en 0 en posant $f(0) = -2$ avec $f'(0) = 1$.

$\boxed{\text{L'équation de sa tangente est : } y = -2 + x.}$

La position relative est donnée par le signe de $-\dfrac{3x^2}{2}$, donc $\boxed{\text{la courbe est en dessous de sa tangente.}}$

4. ➤ Résolution de $\mathcal{E}_1 \ : \ y' - \dfrac{1}{t\ln(t)}y = \dfrac{\ln^2(t)}{t}\cos\left(\ln^2(t)\right)$ sur $]e, +\infty[$

- Équation homogène : on pose $a : t \mapsto -\dfrac{1}{t\ln(t)}$; une primitive est $A : t \mapsto -\ln\left(\ln(t)\right)$.
  Ainsi, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_1} = \{t \mapsto k\ln(t); k \in \mathbb{R}\}$.
- Recherche d'une solution particulière : la méthode de variation de la constante donne qu'une solution est de la forme $t \mapsto k(t)\ln(t)$ avec $k'(t)\ln(t) = \dfrac{\ln^2(t)}{t}\cos\left(\ln^2(t)\right)$.
  Alors $k : t \mapsto \dfrac{1}{2}\sin\left(\ln^2(t)\right)$ convient. Ainsi, une solution particulière est : $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{2}\sin\left(\ln^2(t)\right)$.
  Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{E}_1} = \{t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{2}\sin\left(\ln^2(t)\right) + k\ln(t); k \in \mathbb{R}\}.}$

➤ Résolution de $\mathcal{E}_2 \ : \ y'' - 2y' + 2y = e^t\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

- Équation homogène : le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 2$ et ses racines sont $1 + i$ et $1 - i$. Ainsi, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_2} = \{t \mapsto \alpha e^t\sin(t) + \beta e^t\cos(t); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
- Recherche d'une solution particulière : le second membre est $t \mapsto \operatorname{Im}\left((e^{(1+i)t}\right)$.
  On considère maintenant l'équation : $\mathcal{E}_2' \ : \ y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)t}$
  Comme $1 + i$ est une racine simple du polynôme caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme : $t \mapsto \gamma t e^{(1+i)t}$ ce qui donne, après remplacement, $2i\gamma = 1$.
  Une solution particulière de $\mathcal{E}_2'$ est $t \mapsto -\dfrac{it}{2}e^{(1+i)t}$.
  Ainsi, prenant la partie imaginaire, une solution particulière de $\mathcal{E}_2$ est $t \mapsto -\dfrac{t}{2}e^t\cos(t)$.

  Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{E}_2} = \{t \mapsto \alpha e^t\sin(t) + \left(\beta - \dfrac{t}{2}\right)e^t\cos(t); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.}$

Exercice 2 - Une symétrie

1. a) Soient $u = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$, $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} J(\lambda u + \mu v) & = & J(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2) \\ & = & (-\lambda y_1 - \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2, \lambda t_1 + \mu t_2, -\lambda z_1 - \mu z_2) \\ & = & \lambda(-y_1, x_1, t_1, -z_1) + \mu(-y_2, x_2, t_2, -z_2) \\ & = & \lambda J(u) + \mu J(v). \end{array}$$

Donc $\boxed{J \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$.

b) I, J, K, L sont des vecteurs de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Ainsi, $\boxed{E = \mathrm{Vect}(I, J, K, L) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$.

c) Par définition de E, (I, J, K, L) est une famille génératrice de E.
Montrons maintenant qu'elle est libre : soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, on a donc : $\alpha I(u) + \beta J(u) + \gamma K(u) + \delta L(u) = (0, 0, 0, 0)$.
En particulier pour le vecteur $u = (1, 0, 0, 0)$, il vient :

$$\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

D'où $(\alpha, \beta, \gamma, -\delta) = (0, 0, 0, 0)$ puis $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Donc (I, J, K, L) est libre.
Ainsi $\boxed{(I, J, K, L) \text{ est donc une base de } E}$.

2. a) Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (J \circ K)(x, y, z, t) & = & J\big(K(x, y, z, t)\big) \\ & = & J(-z, -t, x, y) \\ & = & (t, -z, y, -x) \\ & = & L(x, y, z, t) \end{array}$$

On détermine de même $K \circ L$ et $L \circ J$.
Ainsi, $\boxed{J \circ K = L, \quad K \circ L = J, \quad L \circ J = K}$

b) Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (J \circ J)(x, y, z, t) & = & J\big(J(x, y, z, t)\big) \\ & = & J(-y, x, t, -z) \\ & = & (-x, -y, -z, -t) \\ & = & -I(x, y, z, t) \end{array}$$

On détermine de même K^2 et L^2.
Ainsi, $\boxed{J^2 = K^2 = L^2 = -I}$.
On a $L = J \circ K$. Donc $J \circ L = J \circ J \circ K = -I \circ K = -K$. D'où $J \circ L = -K$.
Les autres égalités s'obtiennent de la même façon.
Ainsi, $\boxed{K \circ J = -L, \quad L \circ K = -J, \quad J \circ L = -K}$.

c) Soient $A \in E$ et $B \in E$. Il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ et $(\lambda,\mu,\nu,\xi) \in \mathbb{R}^4$ tels que :
$A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ et $B = \lambda I + \mu J + \nu K + \xi L$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} A \circ B & = & (\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L) \circ (\lambda I + \mu J + \nu K + \xi L) \\ & = & \alpha(\lambda I + \mu J + \nu K + \xi L) + \beta(\lambda J + \mu J \circ J + \nu J \circ K + \xi J \circ L) \\ & & +\gamma(\lambda K + \mu K \circ J + \nu K \circ K + \xi K \circ L) + \delta(\lambda L + \mu L \circ J + \nu L \circ K + \xi L \circ L) \end{array}$$

D'après les deux questions précédentes, tous les endomorphismes qui apparaissent dans l'expression précédente sont éléments de E. Donc $A \circ B$ est combinaison linéaire de vecteurs de E, or E est un espace vectoriel donc $A \circ B \in E$.
Ainsi, $\boxed{E \text{ est donc stable par composition}}$.

3. Le script de la fonction S :

```python
def S(x,y,z,t):
    return(-y-z,x-t,t+x,-z+y)
```

4. S est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ car c'est une somme d'endomorphismes.
De plus, $S^2 = (J+K)\circ(J+K) = J^2 + J \circ K + K \circ J + K^2 = -I + L - L - I = -2I$.

Attention ! Ne pas utiliser la formule du binôme ici, car J et K ne commutent pas.
Donc $(-\frac{1}{2}S) \circ S = S \circ (-\frac{1}{2}S) = I$. Donc S est bijectif, de réciproque $-\frac{1}{2}S$.
Ainsi, $\boxed{S \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^4) \text{ et } S^{-1} = -\frac{1}{2}S}$.

5. a) Soit $M \in E$. $S = J + K$ et $S^{-1} = -\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}K$ sont combinaisons linéaires de vecteurs de E, donc ce sont eux-mêmes des vecteurs de E.
Or E est stable par composition (d'après 2c) donc $\varphi(M) = S \circ M \circ S^{-1} \in E$.
Montrons maintenant que φ est linéaire : soient $(M,N) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\lambda M + \mu N) & = & S \circ (\lambda M + \mu N) \circ S^{-1} & \\ & = & (\lambda S \circ M + \mu S \circ N) \circ S^{-1} & \text{découle de la linéarité de la composition} \\ & = & \lambda S \circ M \circ S^{-1} + \mu S \circ M \circ S^{-1} & \\ & = & \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N) & \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E)}$.

b) Pour tout $M \in E$, on a $(\varphi \circ \varphi)(M) = \varphi(S \circ M \circ S^{-1}) = S \circ S \circ M \circ S^{-1} \circ S^{-1}$.
Or $S \circ S = -2I$ et $S^{-1} \circ S^{-1} = \frac{1}{4} S \circ S = -\frac{1}{2}I$.
Donc $(\varphi \circ \varphi)(M) = -2I \circ M \circ (-\frac{1}{2}I) = I \circ M \circ I = M$.
Ainsi, $\boxed{\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E}$.

c) $F = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E car noyaux d'endomorphismes de E. Procédons par analyse-synthèse pour montrer que $F \oplus G = E$.
Soit $M \in E$. Montrons qu'il existe un unique $(A,B) \in F \times G$ tel que $M = A + B$.
➢ **Analyse :** supposons qu'il existe $(A,B) \in F \times G$ tel que $M = A + B$.

$$\begin{array}{rrcccl} & A \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E) & \Rightarrow & \varphi(A) - A = 0_E & \Rightarrow & \varphi(A) = A \\ \text{et} & B \in \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E) & \Rightarrow & \varphi(B) = -B & & \end{array}$$

Ainsi, $\left\{ \begin{array}{l} M = A + B \\ \varphi(M) = A - B \end{array} \right.$

Par opération sur les lignes, on obtient l'unicité de A et B : $\begin{cases} A = \frac{1}{2}(M + \varphi(M)) \\ B = \frac{1}{2}(M - \varphi(M)) \end{cases}$

➢ **Synthèse :** Soient $M, A, B \in E$ tel que $\begin{cases} A = \frac{1}{2}(M + \varphi(M)) \\ B = \frac{1}{2}(M - \varphi(M)) \end{cases}$

Il vient :

- $A + B = \frac{1}{2}(M + \varphi(M)) + \frac{1}{2}(M - \varphi(M)) = M$.
- $\varphi(A) = \frac{1}{2}\big(\varphi(M) + (\varphi \circ \varphi)(M)\big) = \frac{1}{2}(\varphi(M) + M) = A$. Donc $A \in F = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.
- $\varphi(B) = \frac{1}{2}\big(\varphi(M) - (\varphi \circ \varphi)(M)\big) = \frac{1}{2}(\varphi(M) - M) = -B$. Donc $B \in G = \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E)$.

Ainsi, $\forall\, M \in E,\ \exists!\,(A, B) \in F \times G$ tel que $M = A + B$.

Autrement dit, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E) \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

d) $F = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
Soit $M \in E$ et (A, B) l'unique couple de $F \times G$ tel que $M = A + B$ avec $\varphi(A) = A$ et $\varphi(B) = -B$.
Alors d'après 4c) : $\varphi(M) = \varphi(A) + \varphi(B) = A - B$.
On retrouve la définition de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_E) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E)}$.

e) Soit $M \in E$ et (A, B) l'unique couple de $F \times G$ tel que $M = A + B$.
Par définition de φ et de ψ on a :

$$\mathrm{Id}_E(M) = A+B \quad \text{et} \quad \varphi(M) = A-B \quad \Rightarrow \quad \psi(M) = B = \frac{1}{2}\big((A+B)-(A-B)\big) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E(M)-\varphi(M))$$

Ainsi, $\boxed{\psi = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E - \varphi)}$

f) Travaillant dans la base (I, J, K, L) de E on veut résoudre pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\varphi + \mathrm{Id}_E)(aI + bJ + cK + dL) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \dots \\ &\Leftrightarrow \quad 2aI + (b + c)J + (b + c)K - dL = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = d = 0 \text{ et } b = -c \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(J - K)}$.

Exercice 3 - Marche aléatoire

1. **Valeurs extrémales**
   Si la puce part d'une extrémité, elle s'arrête tout de suite.
   Ainsi, si elle est initialement placée en 0, elle s'arrête en 0 dès le début donc $\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0}$
   et si elle est initialement placée en N, elle s'arrête en N dès le début donc $\boxed{a_N = 0 \text{ et } b_N = 1.}$
2. **Relation de récurrence**
   Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. Notons :
   - A_n l'événement : la puce s'arrête en 0 en partant de n.
   - E_{n_0,n_1} l'événement : la puce est au point n_0 à l'instant 0, n_1 à l'instant 1.

   Remarque : *Souvent, la formule de probabilité totales permet de décrire un état en fonction des états de la situation précédente. Cette fois, l'expression comprends le contraire : on s'intéresse aux évolutions possibles de la situation. Ainsi, nous allons considérer toutes les évolutions possibles entre la position initiale et la suivante pour former notre système complet d'évènement.*
   La famille $\{E_{i,j}; i, j \in [\![1, N]\!]\}$ est un système complet d'évènement. La formule des probabilités totales donne :
   $$a_n = \mathbf{P}(A_n) = \sum_{0 \leq i,j \leq N} \mathbf{P}(E_{i,j}) \mathbf{P}_{E_{i,j}}(A_n)$$
   - si $i \neq n$ alors $\mathbf{P}_{E_{i,j}}(A_n) = 0$ car la puce commence en n.
   - si $i = n$ et $j \notin \{n-1, n+1\}$ alors $\mathbf{P}_{E_{i,j}}(A_n) = 0$ car la puce ne se déplace que d'une case vers la gauche ou vers la droite.
   - si $i = n$ et $j = n-1$ alors $\mathbf{P}(E_{n,n-1}) = q$ et $\mathbf{P}_{E_{n,n-1}}(A_n)$ est la probabilité que la puce s'arrête en 0 en ayant commencé en n suivi de $n-1$, ce qui revient par décalage à avoir commencé en $n-1$, donc $\mathbf{P}_{E_{n,n-1}}(A_n) = a_{n-1}$.
   - si $i = n$ et $j = n+1$ alors $\mathbf{P}(E_{n,n+1}) = p$ et $\mathbf{P}_{E_{n,n+1}}(A_n)$ est la probabilité que la puce s'arrête en 0 en ayant commencé en n suivi de $n+1$, ce qui revient par décalage à avoir commencé en $n+1$, donc $\mathbf{P}_{E_{n,n+1}}(A_n) = a_{n+1}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in [\![1, N-1]\!],\ a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}.}$
   En procédant de façon analogue on a $\boxed{\text{pour tout } n \in [\![1, N-1]\!],\ b_n = pb_{n+1} + qb_{n-1}.}$
3. **Suites récurrentes linéaires double**
   Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$$
   - La suite nulle vérifie la relation donc $(0) \in E$, donc E est non vide.
   - Soit $(u_n), (v_n) \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considérons la suite $\alpha(u_n) + \beta(v_n) = (\alpha u_n + \beta v_n)$ et
   $$\begin{aligned} \alpha u_n + \beta v_n &= \alpha(pu_{n+1} + qu_{n-1}) + \beta(pv_{n+1} + qv_{n-1}) \\ &= p(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + q(\alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}) \end{aligned}$$
   Donc $\alpha(u_n) + \beta(v_n) \in E$, donc E est stable par combinaison linéaire.

   Ainsi, $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ donc un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$
4. **Dimension de E**
   Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ l'application qui à $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe (u_0, u_1).
   - *Linéarité :* Soit $(u_n), (v_n) \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors
   $$\begin{aligned} \varphi\Big(\alpha(u_n) + \beta(v_n)\Big) &= \varphi\Big((\alpha u_n + \beta v_n)\Big) = (\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1) \\ &= \alpha(u_0, u_1) + \beta(v_0, v_1) = \alpha\varphi\Big((u_n)\Big) + \beta\varphi\Big((v_n)\Big) \end{aligned}$$

- *Injectivité :* Soit $(u_n) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc $u_0 = u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{p}(u_n - qu_{n-1})$.
  Par récurrence, on trouve pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$, donc la suite (u_n) est nulle et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(0)\}$.
- *Surjectivité :* Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et posons $u_0 = a$ et $u_1 = b$. On construit par récurrence la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{p}(u_n - qu_{n-1})$. Alors $\varphi\Big((u_n)\Big) = (a,b)$.

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphime de } E \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ et } \dim(E) = 2.}$

5. **Suites géométriques vérifiant la récurrence**
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
$$(\lambda^n) \in E \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \lambda^n = p\lambda^{n+1} + q\lambda^{n-1} \quad \Leftrightarrow_{\lambda \neq 0} \quad \boxed{\lambda = p\lambda^2 + q}$$

6. **Base de E, cas où $p \neq \dfrac{1}{2}$**
   On note que $p + q = 1$, donc $\lambda = 1$ est une solution évidente de l'équation précédente. L'autre solution du trinôme est $\dfrac{q}{p}$ (le terme constant du trinôme correspond au produit des racines).
   On a $\mathrm{Vect}\left((1)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}, \left(\left(\dfrac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}}\right)^{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}\right) \subset E$ et comme $p \neq \dfrac{1}{2}$ alors la famille $\left((1)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre donc une base de E qui est de dimension 2.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour } p \neq \dfrac{1}{2}, \text{ une base de } E \text{ est } \left((1)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).}$

   ➢ On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, en considérant a_0 et a_N :
$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha & +\beta & = 1 \\ \alpha & +\left(\dfrac{q}{p}\right)^N \beta & = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1\right)\beta = -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1\right)\alpha = \left(\dfrac{q}{p}\right)^N \\ \left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1\right)\beta = -1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{q^N}{q^N - p^N} \\ \beta = -\dfrac{p^N}{q^N - p^N} \end{array}\right.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = \dfrac{1}{q^N - p^N}\left(q^N - p^{N-n}q^n\right).}$

7. **Base de E, cas où $p = \dfrac{1}{2}$**
   Comme $p = \dfrac{1}{2}$, alors $q = 1 - p = \dfrac{1}{2}$. On note que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n-1) = n$$
   Donc $(n) \in E$. Comme $\Big((1),(n)\Big)$ est libre, c'est une base de E.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour } p = \dfrac{1}{2}, \text{ une base de } E \text{ est } \Big((1),(n)\Big).}$

   ➢ On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha & & = 1 \\ \alpha & +N\beta & = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -dfrac1N \end{array}\right.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = \dfrac{N-n}{N}.}$

8. **Probabilité que la puce ne s'arrête jamais**
Soit $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le suite définie par $\sigma_n = a_n + b_n$. Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $a \in E$ et $b \in E$ alors $\sigma = a + b \in E$. De plus, comme $a_0 = b_N = 1$ et $a_N = b_0 = 0$, nous savons que $\sigma_0 = \sigma_N = 1$.

   - Lorsque $p \neq \frac{1}{2}$, on cherche α et β tels que $\sigma_n = \alpha + \beta \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$ c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha & +\beta & & = 1 \\ \alpha & + \left(\dfrac{q}{p}\right)^N & \beta & = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1\right)\beta = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

   - Lorsque $p = \frac{1}{2}$, on cherche α et β tels que $\sigma_n = \alpha + n\beta$ c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha & +\beta & = 1 \\ \alpha & +N\beta & = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ (N-1)\,\beta = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, dans les deux cas, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \sigma_n = 1.}$
La probabilité que la puce ne s'arrête jamais, au départ de la case n est $1 - \sigma_n = 0$.
Remarque : *Nous avons démontré que l'événement :* la puce ne s'arrête jamais *est **négligeable** : c'est à dire que la probabilité de cet événement est nulle. Pourtant, l'événement n'est pas impossible : lorsque $N = 3$, la puce peut partir du point 2 et sauter tantôt au point 1, tantôt au point 2 sans jamais s'arrêter, faute d'arriver à l'extrémité 0 ou 3. Cependant, la probabilité de continuer à osciller ainsi à jusqu'à l'instant $2n$ est égale à $p^n q^n$, qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$... Ces situation sont au programme de la seconde année.*

Exercice 4 - Décomposition d'un rationnel en éléments simples

1. L'identité de Bezout pour le couple (b, c) deux entiers premiers entre eux alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\boxed{bu + cv = 1}$$

2. Soit p un nombre premier, k, n, q trois entiers tels que n et q sont premiers avec p. Donc p^k et q sont premiers entre eux, l'identité de Bezout donne qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que
$$up^k + vq = 1 \qquad \text{donc} \qquad nup^k + nvq = n$$
On pose ℓ et t respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de nv par p^k, alors $nv = tp^k + \ell$. Il vient,
$$nup^k + (tp^k + \ell)q = n \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(nu + tq)}_{=m}p^k + \ell q = n \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{p^k q} = \frac{\ell}{p^k} + \frac{nu + tq}{q}$$
Ainsi, $\boxed{\text{il existe un couple d'entiers } (\ell, m) \text{ tels que : } \begin{cases} \dfrac{n}{p^k q} = \dfrac{\ell}{p^k} + \dfrac{m}{q} \\ 1 \leq \ell \leq p^k - 1 \end{cases}}$

3. Comme $31 = 3 \times 9 + 3 + 1$, alors $\boxed{\dfrac{31}{9} = 3 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}.}$
Comme $-31 = -4 \times 9 + 3 + 2$, alors $\boxed{-\dfrac{31}{9} = -4 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9}.}$

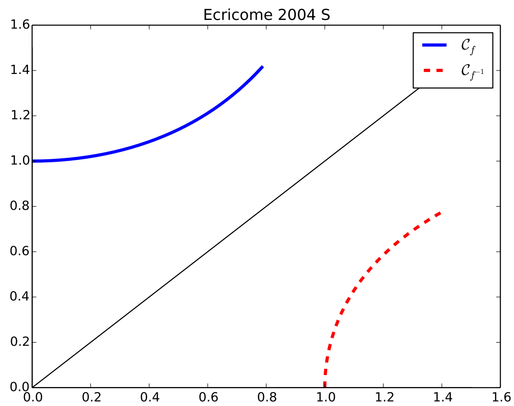
4. On remarque que $r = \dfrac{2}{315} = \dfrac{2}{3^2 \times 35}$. L'identité de Bezout du couple $(3^2, 35)$ donne :
$$\begin{aligned} 4 \times 3^2 - 35 = 1 \quad &\Rightarrow \quad 8 \times 3^2 - 2 \times 35 = 2 \qquad \text{en multipliant par 2} \\ &\Rightarrow \quad 8 \times 3^2 + (7 - 9) \times 35 = 2 \\ &\Rightarrow \quad (8 - 35) \times 3^2 + 7 \times 35 = 2 \\ &\Rightarrow \quad -27 \times 3^2 + 7 \times 35 = 2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{315} = \frac{7}{3^2} - \frac{27}{35} \end{aligned}$$
Comme $7 = 2 \times 3 + 1$, donc $\dfrac{7}{3^2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3^2}$.
Décomposons $-\dfrac{27}{5 \times 7}$. L'identité de Bezout du couple $(5, 7)$ donne :
$$\begin{aligned} 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1 \quad &\Rightarrow \quad -81 \times 5 + 54 \times 7 = -27 \qquad \text{en multipliant par -27} \\ &\Rightarrow \quad -81 \times 5 + (10 \times 5 + 4) \times 7 = -27 \\ &\Rightarrow \quad (70 - 81) \times 5 + 4 \times 7 = -27 \\ &\Rightarrow \quad -11 \times 5 + 4 \times 7 = -27 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{27}{35} = \frac{4}{5} - \frac{11}{7} \end{aligned}$$
Enfin, $-\dfrac{11}{7} = -2 + \dfrac{3}{7}$.
Ainsi, $\boxed{\text{la décomposition en éléments simples est } \dfrac{2}{315} = -2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{7}.}$

Problème 5

Partie A – Étude de la bijection réciproque de f

1. La fonction f est dérivable sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\quad f'(x) = -\dfrac{\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.
   Donc f' est nulle en 0 et strictement positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$; alors f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Ainsi, La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[f(0), f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = [1, \sqrt{2}]$.
   Ainsi, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \text{ sur } J = [1, \sqrt{2}].}$

2. Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (dans une repère orthonormé).
   On peut aussi préciser que $\mathcal{C}_f$ possède une tangente horizontale en (0,1).
   $\Rrightarrow$ *L'étude de f'' donne que f est convexe donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.*



3. Soit $x \in [1, \sqrt{2}]$,
$$x = f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x}$$
   De plus, $\sin^2 + \cos^2 = 1$ donc
$$\sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1 - \cos^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$
   Comme $x \in [1, \sqrt{2}]$, alors $f^{-1}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\sin\left(f^{-1}(x)\right) \geq 0$ donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.
   Ainsi, $\boxed{\forall x \in [1, \sqrt{2}],\ \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x} \text{ et } \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}$.

4. La fonction f est dérivable et de dérivée strictement positive (donc non nulle) sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et nulle en 0 avec $f(0) = 1$. Alors le théorème sur la dérivabilité des fonctions réciproques donne que f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) =]1, \sqrt{2}] = J - \{1\}$. Ainsi, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable } J - \{1\}.}$

Soit $x \in J - \{1\}$, $$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)}{\sin\left(f^{-1}(x)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{x^2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$
Or x est positif, donc $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Ainsi, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J - \{1\} \text{ et } \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.}$

5. Comme f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ donc f^{-1} possède un développement limité d'ordre 1 en $\sqrt{2}$:

$$f^{-1}(x) \underset{\sqrt{2}}{=} f^{-1}(\sqrt{2}) + \left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})\,(x-\sqrt{2}) + o(x-\sqrt{2})$$

On a $f^{-1}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, $\boxed{f^{-1}(x) \underset{\sqrt{2}}{=} \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x-\sqrt{2}) + o(x-\sqrt{2}).}$

Partie B – Étude des dérivées successives de f

6. La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annule pas sur I.
   Alors considérant son inverse, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I.}$

7. Procédons par <u>récurrence</u> sur $n \in \mathbb{N}$. Le relation entre les P_n est d'ordre 1 donc une récurrence simple suffit :
   - Initialisation : pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$ donc $P_0 = 1$ convient.
     Traitons le cas $n = 1$: on sait que $f' = \dfrac{\sin}{\cos^2}$ alors $P_1 = X$ convient.
     Traitons le cas $n = 2$: on a
     $$f'' = \frac{\sin' \times \cos^2 - \sin \times 2(-\sin)\cos}{\cos^4} = \frac{1-\sin^2 + 2\sin^2}{\cos^3}$$
     alors $P_2 = X^2 + 1$ convient.
     ⇛ *Traiter plusieurs cas simples permet de mieux préparer la suite.*

   - Hérédité : soit $n \geq 2$; supposons qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)} = \dfrac{P_n \circ \sin}{\cos^{n+1}}$.
     Alors,
     $$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(f^{(n)}\right)' = \left(\frac{P_n \circ \sin}{\cos^{n+1}}\right)' \\ &= \frac{\cos P_n'(\sin)\cos^{n+1} - P_n \circ \sin \times (n+1)(-\sin)\cos^n}{\cos^{2n+2}} \\ &= \text{simplifions par } \cos^n \\ &= \frac{\cos^2 P_n'(\sin) + (n+1)\sin P_n(\sin)}{\cos^{n+2}} \end{aligned}$$
     Définissons le polynôme $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n \in \mathbb{R}[X]$.
     Ainsi, $f^{(n+1)} = \dfrac{P_{n+1} \circ \sin}{\cos^{n+2}}$; la relation est vérifiée au rang $n+1$.

- Conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X];\ f^{(n)} = \dfrac{P_n \circ \sin}{\cos^{n+1}}}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n}$.

8. On a déjà vu en B7) que $\boxed{P_1 = X \text{ et } P_2 = 1 + X^2}$.
De plus, la relation de récurrence donne :

$$P_3 = (1-X^2)P_2' + 3XP_2 = (1-X^2)2X + 3X(1+X^2) = 5X + X^3$$

Ainsi, $\boxed{P_3 = 5X + X^3}$.

9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: le terme dominant de P_n est X^n.
   - Initialisation : $\mathcal{P}(i)$ est vraie pour $i \in \{0,1,2,3\}$ d'après B2) et B3).
   - Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Cherchons le terme dominant de $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$:
     - le terme dominant de P_n est X^n ;
     - donc le terme dominant de $(n+1)XP_n$ est $(n+1)X^{n+1}$;
     - le terme dominant de P_n' est nX^{n-1} ;
     - donc le terme dominant de $(1-X^2)P_n'$ est $-X^2 \times nX^{n-1} = -nX^{n+1}$.
     - Comme $(n+1)X^{n+1} - nX^{n+1} = X^{n+1} \neq 0$, le terme dominant de P_{n+1} est X^{n+1} donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   - Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^n est le terme dominant de P_n.

   Ainsi, $\boxed{P_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 1}$.

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on supposons qu'il existe Q_n vérifiant

$$f^{(n)} = \frac{Q_n(\sin)}{\cos^{n+1}}$$

Ainsi, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $P_n(\sin(x)) = Q_n(\sin(x))$.
La bijectivité de sin de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ donne : $\forall t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $P_n(t) = Q_n(t)$.
Ainsi, le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines, donc il est nul : $P_n = Q_n$.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (P_n) \text{ est unique.}}$

Partie C – Étude de la suite d'intégrales

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue sur le segment $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ donc f^n aussi : l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\mathrm{d}x$ est bien définie.
De plus, $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \Big[\tan(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1 - 0 = 1$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est bien définie et } I_2 = 1.}$

12. Soit $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{a(1+t) + b(1-t)}{1-t^2} = \frac{a+b+(a-b)t}{1-t^2}$$

Ainsi,

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{1}{1-t^2} \quad \Leftrightarrow \quad a + b + (a-b)t = 1$$

Par identification des coefficients (unicité des coefficients polynômiaux), on a

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a=b=\frac{1}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}-\{-1,1\}, \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+t} \text{ c'est-à-dire } a=b=\dfrac{1}{2}}$

13. Effectuons un changement de variable $\boxed{t=\sin(x)}$ dans l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x$:

$$\begin{cases} t=\sin(x) \\ \mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x \\ x=0 \leftrightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \leftrightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2(x)}\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\sin^2(x)}\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \quad I_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) - \frac{1}{2}\ln(1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{2}+1)^2\right) = \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{I_1 = \ln(\sqrt{2}+1)}$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ alors

$$\begin{aligned} 0<\cos(x)<1 \quad &\Rightarrow \quad 0<\cos(x)<1 \\ &\Rightarrow \quad 0<\cos^{n+1}(x)<\cos^n(x) \\ &\Rightarrow \quad 0<\frac{1}{\cos^n(x)}<\frac{1}{\cos^{n+1}(x)} \end{aligned}$$

Les fonctions étant continues, la <u>croissance de l'intégrale</u> donne : $0<I_n<I_{n+1}$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n+2}(x)}\mathrm{d}x$.
Les applications $u=\tan$ et $v=\dfrac{1}{\cos^n}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
Par <u>intégration par parties</u> nous obtenons : $u' = \dfrac{1}{\cos^2}$ $\quad u=\tan$
$v=\dfrac{1}{\cos^n}$ $\quad v' = \dfrac{(-n)(-\sin)}{\sin^{n+1}} = \dfrac{n\sin}{\sin^{n+1}}$

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\tan(x)\frac{1}{\cos^n(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\frac{n\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)}\mathrm{d}x \\ &= 1\times\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^n - 0 - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}\mathrm{d}x \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}\mathrm{d}x \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n - n\left(I_{n+2}-I_n\right) \end{aligned}$$

Il vient : $(n+1)I_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^n + nI_n$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+2} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} I_n}$.

16. Nous avons vu en 14) que la suite (I_n) est croissante et positive.

 Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^* \ I_{n+2} \geq \dfrac{\sqrt{2}^n}{n+1}$.

 Par croissance comparée, on sait que $\dfrac{\sqrt{2}^n}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

 Donc par comparaison la suite I_{n+2} tend vers $+\infty$.

 Ainsi, $\boxed{\lim I_n = +\infty}$