Colle 27

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

1. Procédés sommatoires discrets

a. Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	

b. Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles.
Séries de Riemann.	

c. Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	

d. Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

Méthodes et savoir-faire

- Déterminer la nature d'une série par comparaison avec une série de Riemann et plus généralement mettre en place une comparaison de séries à termes positifs
- Identifier et calcul de la somme des séries géométriques, exponentielles, téléscopiques
- Pour une série, si rien n'est évident alors revenir à la définition : considérer les sommes partielles !
- Comparaison série-intégrale (fonction monotone)
- Mettre en place le critère spécial des séries alternées

Questions de cours

➜ Série, somme partielle, convergence, somme, reste, absolue convergence et le lien entre les deux types de convergence.

★ Condition nécessaire de convergence.

Exhiber un contre-exemple de la réciproque est fausse en montrant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

➜ CNS de convergence des séries à termes positifs.
Théorème de comparaison des séries à termes positifs : cas $u_n \leq v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.
En particulier, donner les critères pour une comparaison avec une série de Riemann.

➜ Séries usuelles : série téléscopique, série géométrique, série exponentielle, série de Riemann.

Expliquer comment déterminer la nature et la somme de la série $\sum \dfrac{(n^2-1)2^n}{n!}$.

★ La convergence absolue implique la convergence.

★ Définition d'une série alternée. Énoncé du critère spécial des séries alternées.

(i) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

(ii) Justifier que la comparaison $u_n \sim v_n$ n'est pertinente que pour des séries à termes positifs.

★ Série exponentielle. Démontrer le résultat dans le cas réel.

★ Comparaison série-intégrale : établir un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f lorsque f est positive et monotone (choisir le cas croissant ou décroissant).

En déduire des relations de comparaison et donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.