Colle 28

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Attention ! Cette colle sera l'occasion de revenir sur les matrices d'applications linéaires et les séries avec au moins :

- un exercice sur les matrice d'applications linéaires ;
- un exercice sur les séries ;
- un exercice sur les familles sommables.

Extrait du programme

1. Procédés sommatoires discrets

e. Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$. Borne supérieure dans $[0,+\infty]$.	
Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I.	La somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est fini, où $I=\mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge. Invariance de la somme par permutation.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} < +\infty$. Opérations : somme, multiplication par un réel positif.	On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j\in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	La démonstration est hors programme.

f. Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$.	Notation $\ell^1(I)$. Pour $I\in\mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.
Somme d'une famille sommable de nombres complexes.	Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\epsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\left\lvert \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i \right\rvert \leq \epsilon$. Invariance de la somme par permutation.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i\in I$, $\lvert u_i\rvert \leq v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j\in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini.	La démonstration est hors programme.
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}$$	Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Méthodes et savoir-faire

- Sommabilité d'une famille à termes positifs :
  - travail sur les sommes à support fini
  - comparaison à une autre famille sommable
- Mettre en place la sommation par paquets : identifier les différentes partitions.
- Reconnaître les sommes usuelles (séries usuelles).

Questions de cours pratiques

➜ Somme d'une famille à termes positifs. Famille à termes positifs sommable.
Expliquer l'invariance de la somme par permutation.

➜ Propriétés sur les familles à termes positifs : sommation par paquets, changement d'indice, restriction, linéarité, croissance, Fubini, familles produits.

★ Sommabilité des familles $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,3]}$ et $\left(\dfrac{1}{5^{j+k}}\right)_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$.

➜ Famille complexe sommable. Propriétés (les mêmes, l'inégalité triangulaire et le produit de Cauchy).
Cas particulier : une série absolument convergente est commutativement convergente.

★ Soit $x \in]-1,1[$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

★ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la famille $\left(\dfrac{|z|^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

On définit la fonction suivante $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Alors f est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

En particulier, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\quad f(z+z') = f(z)f(z')$.

★ Considérant f définie ci-avant :

(i) $f_{|\mathbb{R}}$ est dérivable en 0 et $f'_{|\mathbb{R}}(0) = 1$

(ii) $f_{|\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_{|\mathbb{R}}(x) = f_{|\mathbb{R}}(x)$