Colle 30

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

1. Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.
Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

a. Produit scalaire

Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.	Expressions $X^{\mathrm{T}}Y$, $\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

b. Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2 - 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.

c. Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^{\perp}$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée).	
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	

d. Bases orthonormales

Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien.	
Théorème de la base orthonormale incomplète.	
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	

e. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^{\perp}$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F.	Notation $d(x, F)$.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\operatorname{Vect}(u)^{\perp}$; distance de x à $\operatorname{Vect}(u)^{\perp}$.

2. Espaces vectoriels et applications linéaires

4. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Le but de cette partie, qu'il convient d'illustrer par de nombreuses figures, est double :

- *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.*
- *modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.*

Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.	L'écriture $B = A + \overrightarrow{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
Intersection de sous-espaces affines.	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.
Repère affine, coordonnées.	

Méthodes et savoir-faire

- Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt
- Identifier et manipuler une matrice orthogonale
- Expression d'un projeté orthogonal, calcul de la distance d'un point à un sous-espace

Questions de cours

➜ Produit scalaire, espace pré-hilbertien, espace euclidien.
Expression du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Exemples classiques.
Norme associée et ses propriétés, distance associée et ses propriétés. Formule de polarisation

★ Inégalité de Cauchy-Schwarz. Exemples dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

➜ Famille orthogonale, famille orthonormale, orthogonal d'une partie et ses propriétés

★ Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore

➜ Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

➜ Caractérisation d'une base orthonormale. Coordonnées d'un vecteur et écriture du produit scalaire dans une b.o.n. Théorème de la base orthonormale incomplète.

➜ Matrice orthogonale et ses propriétés.

➜ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie, propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace.

➜ Projection orthogonale.
Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale. Caractérisation du projeté orthogonal.
Décrire deux méthodes pour déterminer le projeté orthogonal.

★ Distance à une partie. Énoncer le lien entre distance et projeté orthogonal.
Exercice : déterminer les réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x$ soit minimal.

➜ Sous-espace affine, direction, parallélisme, intersection et propriétés.

➜ Hyperplans et ses caractérisations par un vecteur normal, distance d'un point à un hyperplan