Corrigé du DM 25

Partie A

1. La fonction $t \mapsto 0 \in N$ donc $N \neq \emptyset$. Soit $f, g \in N$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in E_2$ et

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0 \quad et \quad (\lambda f + \mu g)(1) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in N$ et N est stable par combinaison linéaire.
Ainsi, par caractérisation, $\boxed{N \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } E_2.}$
2. Par propriété de la dérivation, pour $f, g \in N$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$u(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'' = (\lambda f' + \mu g')' = \lambda f'' + \mu g'' = \lambda u(f) + \mu u(g)$$

Ainsi, $\boxed{u \in \mathcal{L}(N, E_0).}$
Déterminons $\mathrm{Ker}\,(u)$. On sait déjà que $t \mapsto 0 \in \mathrm{Ker}\,(u)$. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(u)$ alors f'' est nulle sur l'intervalle $[0,1]$. Donc, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = ax + b$.
De plus, $f(0) = f(1) = 0$, donc $b = a = 0$ donc f est nulle.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0_N\}$ et donc $\boxed{u \text{ est injective.}}$

3. a) Pour $x \in [0,1]$, on a : $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (x-t)g(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}\int_x^1 (t-x)g(t)\mathrm{d}t$.
Donc $G(x) = \dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t + \dfrac{x}{2}\int_1^x g(t)\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_1^x tg(t)\mathrm{d}t$.
D'une part, $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto tg(t) \in E_0$, donc les quatre intégrale sont des primitives de fonctions continues et donc des applications de E_1. D'autre part, $x \mapsto x \in E_1$, alors par produit et par combinaison linéaire, $\boxed{G \in E_1.}$
Pour $x \in [0,1]$, $G'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}xg(x) - \dfrac{1}{2}xg(x) + \dfrac{1}{2}\int_1^x g(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}xg(x) - \dfrac{1}{2}xg(x)$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [0,1], \quad G'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}\int_1^x g(t)\mathrm{d}t.}$

b) G' est une combinaison linéaire de primitives de $g \in E_0$, donc $G' \in E_1$ et donc $\boxed{G \in E_2}$.

De plus, $\boxed{\text{pour } x \in [0,1],\ G''(x) = \dfrac{1}{2}g(x) + \dfrac{1}{2}g(x) = g(x).}$

c) G et $x \mapsto ax + b$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, donc H également.
Il vient : $H \in N \quad \Leftrightarrow \quad H(0) = H(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G(0) + b = 0 \\ G(1) + a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -G(0) \\ a + b = -G(1) \end{cases}$

$$b = -\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t \text{ et } a = G(0) - G(1) = \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)g(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi, $\boxed{H \in N \text{ si et seulement si } a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2t-1)g(t)\mathrm{d}t \text{ et } b = -\dfrac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t.}$

d) On a alors $u(H) = H'' = G''$ car la dérivée seconde de $x \mapsto ax + b$ est nulle donc $\boxed{u(H) = g.}$
On vient de montrer que pour tout $g \in E_0$, il existe $H \in N$ tel que $u(H) = g$ donc $\boxed{u \text{ est surjective.}}$
e) D'après 2) et 3d), $\boxed{u \text{ est un isomorphisme de } N \text{ sur } E_0.}$

Partie B

4. $$\begin{aligned} N_{n+2} &= \{P \in \mathbb{R}_{n+2}[X]; X(X-1) \text{ divise } P\} \\ &= \{X(X-1)Q; Q \in \mathbb{R}_n[X]\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^{k+1}(X-1); (\alpha_k)_{0\le k\le n} \in \mathbb{R}^{n+1}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de N_{n+2}.
De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k+2$; donc la famille est échelonnée en degré et donc libre. Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } N_{n+2}.}$

5. a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$ alors $P_k = X^{k+2} - X^{k+1}$, $P_k' = (k+2)X^{k+1} - (k+1)X^k$.
Enfin, $\boxed{\text{Si } k > 0,\ v(P_k) = P_k'' = (k+2)(k+1)X^k - (k+1)kX^{k-1} \text{ et } P_0'' = 2.}$
On en déduit que la matrice de v dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} d_0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -d_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \text{ où } d_k = (k+2)(k+1)}$$

b) A est donc une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls (puisque $d_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$).
Ainsi, A est inversible et donc $\boxed{v \text{ est un isomorphisme de } N_{n+2} \text{ sur } \mathbb{R}_n[X].}$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} P_j = \sum_{j=0}^{k} X^{j+2} - X^{j+1} = X^{k+2} - X$ par téléscopie.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{j=0}^{k} P_j = X^{k+2} - X.}$

d) Pour déterminer $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v^{-1})$, exprimons $v^{-1}(X^k)$ dans la base $\mathcal{C}$ où $k \in [\![0, n]\!]$.
D'après 5c), $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{k} P_j\right) = (X^{k+2} - X)'' = (k+2)(k+1)X^k$ donc $\displaystyle v^{-1}(X^k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(k+2)(k+1)} P_j$.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} d_0^{-1} & d_1^{-1} & \cdots & d_n^{-1} \\ 0 & d_1^{-1} & \cdots & d_n^{-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^{-1} \end{pmatrix} \text{ où } d_k = (k+2)(k+1)}$$

6. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$w(P) = \big((X^2 - X)P\big)'' = \big((2X-1)P + (X^2 - X)P'\big)' = 2P + (4X-2)P' + (X^2 - X)P''$$

Par combinaison linéaire d'applications linéaires, w est linéaire.
De plus, $\deg\big((4X-2)P'\big) \le \deg(P)$ et $\deg\big((X^2 - X)P''\big) \le \deg(P)$, alors le degré d'une somme donne $\deg(w(P)) \le \deg(P)$ donc $w(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\boxed{w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]).}$

b) $\boxed{w(1) = 2, \text{ et pour } k \ge 1,\ w(X^k) = v(P_k) = (k+2)(k+1)X^k - (k+1)kX^{k-1}.}$

c) Ainsi, par définition d'une matrice d'application linéaire, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v) = A.}$