Corrigé du DM 27

Série de Bertrand

1. Une série de Riemann est de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. • $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente (c'est la série harmonique), alors par Comparaison de Série A Termes Positifs, $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \text{ diverge.}}$

• $\frac{\ln(n)^3}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^{1,5}}$ est une série de Riemann convergente.

Alors par C.S.A.T.P. $\boxed{\text{la série } \sum \frac{\ln(n)^3}{n^2} \text{ converge.}}$

• $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente ; alors par C.S.A.T.P. $\boxed{\text{la série } \sum \frac{\ln(n)}{n} \text{ diverge.}}$

3. On a $\frac{1}{n\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et pour tout $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$. Le critère de comparaison de série à termes positifs ne peut être appliqué, en l'état, par comparaison avec une série de Riemann.

4. Étude de $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$, pour $n \geq 2$.

a) Pour $n \geq 3$, $\ln(n) > 1$ et donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ (car $\beta \leq 0$).

Alors par C.S.A.T.P. $\boxed{\text{si } \beta \leq 0, \text{ alors la série } \sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \text{ diverge.}}$

b) Soit $\beta > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^\beta}$ est décroissante.

(i) Soit $n \geq 2$:

• Pour $k \in [\![2, n]\!]$ on a, par décroissance de la fonction, pour $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\beta} \leq \frac{1}{t\ln(t)^\beta} \leq \frac{1}{k\ln(k)^\beta}$$

• Par croissance de l'intégrale, il vient

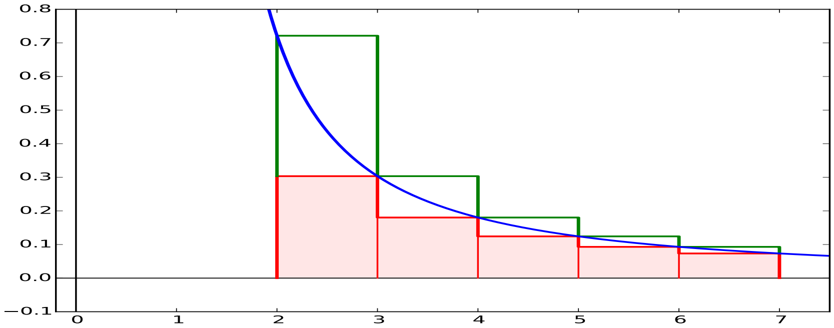
$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\beta} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\beta}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)^\beta}\mathrm{d}t = \frac{1}{k\ln(k)^\beta}$$

et donc $0 \leq \frac{1}{k\ln(k)^\beta} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k\ln(k)^\beta} - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\beta}$

• Par sommation, relation de Chasles et simplification téléscopique, il vient :

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} - \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\beta} \\ &\leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^\beta} \\ &\leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t.}$



Par curiosité, le script PYTHON donnant cette figure est :

```
plt.axis([-0.2,7.5,-0.1,0.8]) # fenetre

f=lambda x:1/x/np.log(x)
t=np.arange(1.5,7.5,0.01)

plt.plot([-0.5,7.5],[0,0],'k-') # axex (Ox)
plt.plot([0,0],[-0.5,6.5],'k-') # axex (Oy)
plt.xticks([0,1,2,3,4,5,6,7],['0','1','2','3','4','5','6','7'])

x=[2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7]
y1=[0,f(3),f(3),f(4),f(4),f(5),f(5),f(6),f(6),f(7),f(7),0]
y2=[f(3),f(2),f(2),f(3),f(3),f(4),f(4),f(5),f(5),f(6),f(6),f(7)]

for i in range(3,7):
    plt.plot([i,i],[0,f(i)],'r-',lw=1)
plt.plot(x,y1,'r-',lw=2) # rectangles sous la courbe
plt.plot(x,y2,'g-',lw=2) # rectangles au-dessus de la courbe

plt.fill(x,y1,'r',alpha=0.1) # remplissage des rectangles

plt.plot(t,[f(e) for e in t],'b-',linewidth=2) # courbe
plt.show()
```

(ii) • Si $\beta \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $\theta \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, n+1]$:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \ln(t) \\ \mathrm{d}x & = & \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ x = \ln(2) & \leftrightarrow & t = 2 \\ x = \ln(n+1) & \leftrightarrow & t = n+1 \end{array}$$

Il vient : $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t = \int_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} \frac{1}{x^\beta}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_{\ln(2)}^{\ln(n+1)}$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{1-\beta}.}$

• Si $\beta = 1$, une démarche similaire donne : $\boxed{\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).}$

(iii) Soit $\beta \in]0,1[$, alors $\ln(n+1)^{1-\beta} \to +\infty$. Montrons que $\ln(n+1)^{1-\beta} \sim \ln(n)^{1-\beta}$

$$\ln(n+1)^{1-\beta} = \left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta} = (\ln(n) + o(\ln(n)))^{1-\beta} \sim \ln(n)^{1-\beta}$$

car il est possible de composer un équivalent par une fonction puissance.

Maintenant divisons l'inégalité du 4bi) ré-écrite avec le résultat du 4bii) par $\dfrac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta}$, il vient :

$$\underbrace{\frac{\ln(n+1)^{1-\beta}}{\ln(n)^{1-\beta}}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\ln(n)^{1-\beta}}}_{\to 0} \leq \frac{1-\beta}{\ln(n)^{1-\beta}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq \underbrace{\frac{1-\beta}{2\ln(2)^\beta \ln(n)^{1-\beta}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln(n+1)^{1-\beta}}{\ln(n)^{1-\beta}}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\ln(n)^{1-\beta}}}_{\to 0}$$

Par encadrement, il vient $\dfrac{1-\beta}{\ln(n)^{1-\beta}} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \to 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \beta \in]0,1[, \text{ alors } \beta < 1, \text{ alors } \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \sim \frac{\ln(n)^{1-\beta}}{(1-\beta)}.}$

(iv) Une démarche similaire donne $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n)).}$

En particulier $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = \ln(\ln(n)) + o(1)$.

c) La limite infini des équivalents ci-dessus donne que la série diverge si $\beta \in]0,1]$.
Si $\beta > 1$, alors $\ln(n+1)^{1-\beta} \to 0$ et donc l'inégalité du 4bi) ré-écrite avec 4bii) donne que les sommes partielle $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta}$ sont majorée et donc par CNS de convergence des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{k\ln(k)^\beta}$ converge.

Ainsi, $\boxed{\text{la série de Bertrand } \sum \dfrac{1}{n\ln(n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \beta > 1.}$

5. a) L'expression $\dfrac{1}{\ln^{[k]}(t)}$ est définie
si $\ln^{[k-1]}(t) > 0$ et $\ln^{[k-1]}(t) \neq 1$
si $\ln^{[k-2]}(t) > 1$ et $\ln^{[k-2]}(t) \neq e$ (vrai si t est entier)
si $\ln^{[k-3]}(t) > e$
si $\ln^{[k-4]}(t) > e^e$
$\vdots$
si $t > \underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{k-2 \text{ fois}}$

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\cdots\ln^{[k-1]}(n)\left(\ln^{[k]}(n)\right)^\gamma} \text{ est définie pour } n \geq n_0 \text{ avec } n_0 = \underbrace{\left\lfloor e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}} \right\rfloor}_{k-2 \text{ fois}} + 1.}$

b) • Si $\gamma = 1$ alors $\dfrac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))\cdots\ln^{[k]}(t)}$ est décroissante.

Par comparaison à une intégrale et utilisant le changement de variable $\boxed{x = \ln^{[k]}(t)}$ on trouve :

$$\sum_{j=n_0}^{n} \frac{1}{j\ln(j)\ln(\ln(j))\cdots\ln^{[k]}(j)} \geq \int_{n_0}^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))\cdots\ln^{[k]}(t)}\mathrm{d}t = \ln^{[k+1]}(n+1) - \ln^{[k+1]}(n_0+1)$$

et $\ln^{[k+1]}(n+1) - \ln^{[k+1]}(n_0+1) \sim \ln^{[k+1]}(n) \to +\infty$. La série diverge.

• Si $\gamma < 1$, alors $\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\cdots\ln^{[k]}(n)} = o\left(\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\cdots\ln^{[k-1]}(n)\left(\ln^{[k]}(n)\right)^\gamma}\right)$.

Par C.S.A.T.P., la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\cdots\ln^{[k-1]}(n)\left(\ln^{[k]}(n)\right)^\gamma}$ diverge.

• Si $\gamma > 1$, par comparaison à une intégrale, on trouve :

$$\sum_{j=n_0}^{n} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\cdots\ln^{[k-1]}(n)\left(\ln^{[k]}(n)\right)^\gamma} \leq \frac{1}{n_0\ln(n_0)\ln(\ln(n_0))\cdots\ln^{[k-1]}(n_0)\left(\ln^{[k]}(n_0)\right)^\gamma} + \int_{n_0}^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))\cdots\ln^{[k-1]}(t)\left(\ln^{[k]}(t)\right)^\gamma}\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $\boxed{x = \ln^{[k]}(t)}$ donne :

$$\int_{n_0}^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))\cdots\ln^{[k-1]}(t)\left(\ln^{[k]}(t)\right)^{\gamma}}\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{1}{(1-\gamma)\left(\ln^{[k]}(n+1)\right)^{\gamma-1}}}_{\to 0} - \frac{1}{(1-\gamma)\left(\ln^{[k]}(n_0)\right)^{\gamma-1}}$$

Les sommes partielles sont donc majorées, la série étant à termes positifs, elle converge.
Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\cdots\ln^{[k-1]}(n)\left(\ln^{[k]}(n)\right)^{\gamma}} \text{ converge si et seulement si } \gamma > 1.}$

6. **Méthode :** Pour appliquer une comparaison avec une série de Bertrand, il convient de repérer la première puissance qui diffère de 1, dans l'ordre des compositions de ln.

- $\dfrac{\ln(\ln(\ln(n)))^3}{n\ln(n)^2} = o\left(\dfrac{1}{n\ln(n)^{1,5}}\right)$ et la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^{1,5}}$ est une série de Bertrand convergente.

Ainsi, par C.S.A.T.P. $\boxed{\text{la série } \sum \frac{\ln(\ln(\ln(n)))^3}{n\ln(n)^2} \text{ converge.}}$

- $\dfrac{1}{n\ln(n)} = o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{\ln(n)}\ln(\ln(n))^2}\right)$ et la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est une série de Bertrand divergente.

Ainsi, par C.S.A.T.P. $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}\ln(\ln(n))^2} \text{ diverge.}}$

- $\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} = o\left(\dfrac{\ln(\ln(\ln(n)))}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}\right)$ et la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$ est une série de Bertrand divergente.

Ainsi, par C.S.A.T.P. $\boxed{\text{la série } \sum \frac{\ln(\ln(\ln(n)))}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} \text{ diverge.}}$