# DM 27

à rendre le mardi 4 juin 2024

## Séries de Bertrand

1. Définir les séries de Riemann et donner la CNS de convergence.

2. En déduire la nature des séries $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$, $\sum \frac{\ln(n)^3}{n^2}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

3. Justifier que la comparaison à une série de Riemann, ne permet pas de déterminer la convergence de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

4. Étude de $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$, pour $n \geq 2$.

a) Montrer que si $\beta \leq 0$, la série diverge.

b) Soit $\beta > 0$.

(i) Montrer que pour tout $n \geq 2$ :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t$$

et illustrer cette situation de comparaison série-intégrale.

(ii) En distinguant les cas $\beta = 1$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, effectuer le changement de variable $\boxed{x = \ln(t)}$ sur

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t$$

(iii) Montrer que si $0 < \beta < 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \sim \frac{\ln(n)^{1-\beta}}{(1-\beta)}$

(iv) Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

c) Déterminer, en fonction de $\beta$, une CNS de convergence de $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$.

5. Étude de $\sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\cdots\ln^{[k-1]}(n)\left(\ln^{[k]}(n)\right)^\gamma}$, avec $k \geq 2$. On note $f^{[k]} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

a) A partir de quel rang $n_0$, la série ci-dessus est bien définie.

b) Brièvement, en donnant les étapes mais sans les démontrer, refaire la démarche ci-dessus et établir que la série converge si et seulement si $\gamma > 1$.

6. Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{\ln(\ln(\ln(n)))^3}{n\ln(n)^2} \qquad \sum \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}\ln(\ln(n))^2} \qquad \sum \frac{\ln(\ln(\ln(n)))}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$$