Corrigé du DM 28

1. $\boxed{\Delta_1(x) = \det((x)) = x \text{ et } \Delta_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1.}$

2. Soit $n \geq 3$. En développant sur la première colonne, il vient :

$$\Delta_n(x) = x\Delta_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Développant suivant la première ligne le déterminant il vient : $\Delta_n(x) = x\Delta_{n-1}(x) - \Delta_{n-2}(x)$
Ainsi, $\boxed{\text{pour } n \geq, \Delta_n(x) = x\Delta_{n-1}(x) - \Delta_{n-2}(x).}$

3. Procédons par récurrence :

- Initialisation : pour $n = 1$ et $n = 2$, c'est vrai d'après 1) : $\Delta_1 = X$ et $\Delta_2 = X^2 - 1$.
- Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose le résultat vrai aux rangs $n-1$ et $n-2$. Pour $x \in \mathbb{R}$ il vient :

$$\deg(x\Delta_{n-1}(x)) = 1 + \deg(\Delta_{n-1}(x)) = 1 + n - 1 = n > n - 2 = \deg(\Delta_{n-2}(x))$$

Par somme de deux expressions polynômiales, Δ_n est un polynôme et $\deg(\Delta_n) = n$ et son coefficient dominant est déterminé par : $\text{cd}(\Delta_n) = \text{cd}(X\Delta_{n-1}) = \text{cd}(\Delta_{n-1}) = 1$.
Ainsi, la relation est vérfiée au rang n.

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n, \text{ le terme dominant de } \Delta_n \text{ est } X^n.}$

4. Procédosn par récurrence :

- Initialisation : pour $n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1-k}{k} X^{1-2k} = \underbrace{X}_{k=0} + \underbrace{0}_{k=1} = \Delta_1$ car $\binom{0}{1} = 0$ par convention.

Pour $n = 2$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \binom{2-k}{k} X^{2-2k} = X^2 - 1 + 0 = \Delta_2$.

- Hérédité : pour $n \geq 3$, on suppose la relation vérifiée aux rangs $n-1$ et $n-2$.

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= X\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = X\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} X^{n-1-2k} - \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2-k}{k} X^{n-2-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} X^{n-2k} - \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2-k}{k} X^{n-2-2k} \\
&\qquad \text{changement } \boxed{j = k+1} \text{ dans le seconde somme} \\
&= \underbrace{X^n}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} X^{n-2k} - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \binom{n-1-j}{j-1} X^{n-2j} \\
&= X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\binom{n-1-k}{k} + \binom{n-1-k}{k-1} \right) X^{n-2k} \\
&\qquad \text{formule de Pascal} \\
&= \underbrace{X^n}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-k}{k} X^{n-2k} + \underbrace{0}_{k=n} \quad \text{avec } \binom{n}{0} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{k} X^{n-2k}
\end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\text{pour } n \geq 1 : \Delta_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n-k}{k} X^{n-2k}.}$

5. On rappelle que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } \theta \in \left]0, \pi\right[\text{ et } k \in \mathbb{N},\ \varphi(\theta) = \sin\big((k+1)\theta\big) + \sin\big((k-1)\theta\big) = 2\sin(k\theta)\cos(\theta).}$

6. Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, le produit matriciel donne :

$$x_k = \sin((k-1)\theta) - 2\cos(\theta)\sin(k\theta) + \sin((k+1)\theta) = 0 \qquad \text{(d'après 5)}$$

De plus, $x_1 = -2\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(2\theta) = 0$ (formule de duplication).
Et $x_k = n = \sin((n-1)\theta) - 2\cos(\theta)\sin(n\theta) = -\sin((n+1)\theta)$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour } k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = 0 \text{ et } x_n = -\sin((n+1)\theta).}$

7. D'après ce qui précède :

$$\boxed{A_n(-2\cos(\theta)) \times S(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin((n+1)\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{n+1}\right]}$$

Pour de telles valeurs de θ, tout en s'assurant que $S(\theta)$ n'est pas nul, on obtient que $A_n(-2\cos(\theta))$ n'est pas inversible et donc que $\det\big(A_n\big(-2\cos(\theta)\big)\big) = 0$.

8. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, alors $\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \neq 0$ et donc $S\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ n'est pas le vecteur nul ; d'après ce qui précède

$$\Delta_n\left(-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = 0$$

De plus, $\left\{\frac{k\pi}{n+1} ; k \in [\![1, n]\!]\right\}$ est une ensemble de nombres 2 à 2 distincts sur $[0, \pi]$ et cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On obtient donc n racines distinctes 2 à 2 de Δ_n qui est de degré n et unitaire.
Ainsi, $\boxed{\text{la factorisation de } \Delta_n \text{ est : } \Delta_n = \prod_{k=1}^{n}\left(X + 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).}$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $U_k = S\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ et $\lambda_k = x - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

9. Déterminons $A_n(x)^m U_k$. Notons $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ et $A_n(x)^m U_k = (y_i^k)_{1 \leq i \leq n}$:
   - pour $i \in [\![2, n-1]\!]$, $y_i^k = \sin((i-1)\theta) + x\sin(i\theta) + \sin((i+1)\theta) = \big(x + 2\cos(\theta)\big)\sin(i\theta) = \lambda_k \sin(i\theta)$
   - $y_1^k = x\sin(\theta) + \sin(2\theta) = x\sin(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) = \lambda_k \sin(\theta)$
   - $y_n^k = \sin((n-1)\theta) + x\sin(n\theta) = \big(x + 2\cos(\theta)\big)\sin(n\theta) - \underbrace{\sin((n+1)\theta)}_{=\sin(k\pi)=0} = \lambda_k \sin(n\theta)$

Il vient : $A_n(x)^m U_k = \lambda_k U_k$.
Ainsi, une récurrence donne $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N},\ A_n(x)^m U_k = \lambda_k^m U_k.}$

10. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire telle que $\sum_{k=1}^{n} x_k U_k = 0$ avec $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$.
Par propriété de la somme ($\sum$), il vient : alors, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$:

$$A_n(x)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k U_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k A_n(x) U_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^m U_k = 0$$

Soit $P = \sum_{j=0}^{r} \beta_j X^j$. Par combinaison linéaire des équations ci-dessus, nous obtenons :

$$\sum_{j=0}^{r} \beta_j \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^j U_k\right) = 0$$

Par permuation des sommes il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^j \left(\sum_{j=0}^{r} \beta_j \lambda_k^j\right) U_k = \sum_{k=1}^{n} x_k P(\lambda_k) U_k = 0$$

Ainis, $\boxed{\text{pour tout polynôme } P \in \mathbb{R}[X] : \sum_{k=1}^{n} x_k P(\lambda_k) U_k = 0.}$

11. Appliquons le résultat précédent au polynôme P_k, il vient :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j P_k(\lambda_j) U_j = x_k P_k(\lambda_k) U_k = 0$$

Tous les scalaires pour $j \neq k$ sont nuls, par définition de P_k. Maintenant, on sait que U_k n'est pas le vecteur nul donc $x_k P_k(\lambda_k) = 0$ et donc $x_k = 0$.
Ceci vaut vaut pour tous les $k \in [\![1, n]\!]$; ainsi, la famille $(U_1, \ldots, U_n)$ est libre.
De plus est elle de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc $\boxed{(U_1, \ldots, U_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$
D'après le résultat obtenu en 9, l'endomorphisme canoniquement associé à $A_n(x)$ s'écrit matriciellement dans le base $(U_1, \ldots, U_n)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$