DM 28

à rendre le mardi 11 juin 2024

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $A_n(x)$ la matrice définie par : $\big[A_n(x)\big]_{i,j} = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i = j \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Par exemple, lorsque $n = 3$: $A_3(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$

1. Calculer $\Delta_n(x) = \det(A_n(x))$ lorsque $n = 1$ et 2
2. Lorsque $n \geq 3$, démontrer :
$$\Delta_n(x) = x\Delta_{n-1}(x) - \Delta_{n-2}(x)$$
3. En déduire que Δ_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 1.
4. Démontrer par récurrence sur $n \geq 1$:
$$\begin{aligned} \Delta_n &= X^n - \binom{n-1}{1} X^{n-2} + \binom{n-2}{2} X^{n-4} - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{k} X^{n-2k} \end{aligned}$$
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Exprimer :
$$\varphi(\theta) = \sin\big((k+1)\theta\big) + \sin\big((k-1)\theta\big)$$
en fonction de $\sin(k\theta)$, $\cos(k\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$.
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta)$ et $U(\theta)$ les vecteurs colonnes :
$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \sin(2\theta) \\ \vdots \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix} \text{ et } U(\theta) = A_n(-2\cos(\theta)) \times S(\theta). \text{ On note } U(\theta) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
Calculer x_k pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, puis x_1 et x_n.
7. À quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ le vecteur $S(\theta)$ vérifie-t-il :
$$A_n(-2\cos(\theta)) \times S(\theta) = 0$$
Que peut-on en déduire pour $\det\big(A_n\big(-2\cos(\theta)\big)\big)$?
8. Démontrer que $\Delta_n(-2\cos(\theta)) = 0$ lorsque $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$ où $k \in [\![1, n]\!]$.
En déduire une factorisation de Δ_n.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $U_k = S\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ et $\lambda_k = x + 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.
9. Démontrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$:
$$A_n(x)^m U_k = \lambda_k^m U_k$$
10. En déduire que si une combinaison linéaire annule la famille $(U_1, \dots, U_k)$:
$$\sum_{k=1}^{n} x_k U_k = 0$$
alors, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^m U_k = 0$ puis, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k P(\lambda_k) U_k = 0$
11. Pour k étant fixé, si $P = P_k$ est le polynôme défini par : $\displaystyle P_k = \prod_{\ell \neq k} (X - \lambda_\ell)$
en déduire que $x_k P_k(\lambda_k) = 0$, puis en déduire que $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Quelle est la matrice de l'endomorphisme associé à $A_n(x)$ dans cette base ?