Primitives et équations différentielles

Primitives

Exercice 4.1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3},\qquad I_2=\int_0^2 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad I_3=\int_1^e\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t,$$
$$I_4=\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)},\qquad I_5=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(\theta)}{\cos^4(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,\qquad I_6=\int_0^1\frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 4.2 Déterminer une primitives et un intervalle associé pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\sqrt{4x-1},\qquad f_2(x)=\sin^3(x),\qquad f_3(x)=\ln(2x+3),$$
$$f_4(x)=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2,\qquad f_5(x)=\frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}},\qquad f_6(x)=-\frac{x}{(3x^2-1)^5},$$
$$f_7(x)=\frac{1}{2x^2+4x+2},\qquad f_8(x)=\frac{1}{2x^2-x-1},\qquad f_9(x)=\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Exercice 4.3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$J_1=\int_1^2(t^2+2t-3)e^t\,\mathrm{d}t,\ J_2(x)=\int^x\operatorname{Arccos}(t)\mathrm{d}t,\qquad J_3=\int_1^e\ln(t)^2\,\mathrm{d}t,$$
$$J_4=\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,\qquad J_5=\int_0^{\pi/2}\sin(2t)e^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t,\quad J_6=\int_0^1\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.4 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$$K_1=\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{\mathrm{d}x}{e^x-e^{-x}}\ \ (t=e^x),\ K_2=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x\ \ \left(u=\frac{x}{x+1}\right)$$
$$K_3=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3(\theta)}{1+\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\quad(s=\cos(\theta)),\ K_4=\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{e^u-1}}\quad(s=\sqrt{e^u-1})$$
$$K_5(x)=\int^x\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t,\quad(t=\tan(\varphi)),\ K_6=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t,\quad(t=\cos(2\theta))$$

Exercice 4.5 Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de chacune des fonctions suivantes :

$$g_1(x)=\frac{i}{(x+i)^2},\quad g_2(x)=e^{-x}\sin(2x),\quad g_3(x)=\frac{1}{x+i},\quad g_4(x)=xe^{ix}$$

Exercice 4.6 Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b}=\int_0^1 x^a\,(1-x)^b\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a\in\mathbb{N}$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\quad I_{a,b}=\frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1}$$
3. En déduire que : $\forall(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\quad I_{a,b}=\dfrac{a!b!}{(a+b+1)!}$

Exercice 4.7 **Méthode**

Considérer que $t\mapsto\dfrac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $[x,2x]$ et introduire g une primitive qu'il ne sera pas utile d'expliciter : $g\in\mathcal{C}^1([x,2x])$.

Pour tout $x>0$, on pose : $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer f'.
2. Montrer que f' admet une limite en 0.
3. On rappelle que $\forall u\in\mathbb{R}_+,\ 1-u\leq e^{-u}\leq 1$.
En déduire la limite de f en 0.
4. Montrer que f admet une limite à déterminer en $+\infty$.

Exercice 4.8 ❄❄❄ On note $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} \mathrm{d}t$

1. Montrer que φ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

2. En déduire les variations de φ.
3. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$.
4. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. On note φ la fonction ainsi prolongée. Préciser $\varphi(0)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \varphi'(x) = 0$.
Justifier que φ est dérivable en 0 et donner $\varphi'(0)$.

EDL d'ordre 1

Exercice 4.9 Résoudre les équations différentielles sur les intervalles précisés :

(E_1) $y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$,
(E_2) $y' + y = x + \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$,
(E_3) $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ sur $]0,\pi[$,
(E_4) $x\big(1 + \ln^2(x)\big)y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.10 Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $]0;+\infty[$ vérifiant :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + xf(1)$$

Indication : montrer que si f est solution, alors f vérifie une certaine EDL1.

Exercice 4.11 On considère deux fonctions a et b dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe deux solutions différentes φ et ψ de l'équation :

$$(E)\ :\ y' + a(x)y = b(x)$$

telles que φ et ψ ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.
Montrer que toutes les solutions de (E) tendent vers ℓ en $+\infty$.

EDL d'ordre 2

Exercice 4.12 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1)\ :\ y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ $\qquad (E_2)\ :\ y'' + 2y' + y = 2e^{-x} + e^{3x}$

$(E_3)\ :\ y'' + 4y = \sin(2x)$ $\qquad (E_4)\ :\ y'' - 2y' + y = e^x\cos(x)$

Exercice 4.13 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = t\cos(3t)$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4.14 Soit y_1 et y_2 deux solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même EDL du second ordre à coefficients constants :

$$(E)\ :\ y'' + ay' + by = f(t)$$

où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit τ-périodique et que :

$$y_1(0) = y_2(\tau) \quad \text{et} \quad y_1'(0) = y_2'(\tau)$$

Montrer qu'on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = y_2(t+\tau).$$

Exercice 4.15
Montrer que l'équation $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin(x)$ possède une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha x e^x\cos(x) + \beta x e^x \sin(x)$.

Exercice 4.16
1. Soit α et β deux nombres réels. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1)\ :\ y'' - y = \alpha e^x + \beta e^{-x}$$

2. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 4 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $z = y'' - y$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

si, et seulement si, z est solution d'une EDL du second ordre (E_2), que l'on précisera.

3. Résoudre (E_2) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4.17 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E)\ :\ x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0$$

en posant $z = x^2y$ (comprendre : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = x^2y(x)$).

Exercice 4.18 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E)\ :\ (1+x^2)^2y'' + 2(x-1)(1+x^2)y' + y = 0$$

en procédant au changement de variable $t = \mathrm{Arctan}(x)$.

Méthode

Poser $z(t) = y\big(\tan(t)\big)$ ce qui revient à $y(x) = z\big(\mathrm{Arctan}(x)\big)$, calculer y', y'' et remplacer dans l'équation en fonction z et en la variable t.

Exercice 4.19 On pose $I =]0;+\infty[$.
1. Résoudre sur I l'équation (E) à l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$:

$$(E)\ :\ 4x^2y'' + y = 0$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right).$$

Exercice 4.20 Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 4.21 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$$

On pourra commencer par montrer que si f est une solution alors f vérifie une certaine équation du second ordre.
