Inégalités et applications

Prérequis – Dans ce chapitre, nous supposons acquise la notion d'ensemble et les opérations élémentaires sur les ensembles :

- sous-ensemble d'un ensemble E, ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E,
- intersection et réunion de sous ensembles d'un ensemble E.

Nous supposons connues les propriétés des ensembles usuels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) ainsi que les fonctions usuelles (polynôme, fonctions trigonométriques, puissance, logarithme et exponentielle). Nous supposons également connues les notions de limite (finie ou infinie) d'une fonction (en un point $a \in \mathbb{R}$, en $+\infty$ et $-\infty$) telles que définies au lycée.

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Définition – **Intervalle**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \text{ (fermé, dit segment)} \qquad [a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \text{ (semi-ouvert)}$$
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \text{ (ouvert)} \qquad]a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

Les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \text{ (demi-droite fermée)} \qquad]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$$
$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\} \text{ (demi-droite ouverte)} \qquad]-\infty,b[$$

Remarque – Les singletons $[a,a] = \{a\}$ et l'ensemble vide $]a,a[= \emptyset$ sont des intervalles particuliers.

Définition – **Valeur absolue**
*Soit $c \in \mathbb{R}$. On définie la **valeur absolue** x, notée $|x|$, par :* $|x| = \max(x,-x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition – *Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, on a :*
(i) $|xy| = |x|.|y|$,
(ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$,
(iii) $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a \text{ ou } x \leq -a)$,
(iv)
$$\begin{aligned} |x-y| < a &\Leftrightarrow x-y<a \quad \text{et} \quad -(x-y)<a \\ &\Leftrightarrow -a < x-y < a \\ &\Leftrightarrow y-a < x < y+a \\ &\Leftrightarrow x \in]y-a, y+a[\end{aligned}$$
(v) $\sqrt{x^2} = |x|$

Remarque : La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Remarque : La quantité $|x-y|$ s'interprète comme la distance entre les points d'abscisses x et y.

Méthode : Pour manipuler une valeur absolue, penser à travailler par disjonction de cas.

Exercices :

1. Résoudre et représenter $|x-2| \leq 2$, $|x+1| > 3$
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 |t-1|\mathrm{d}t$.
3. Donner la dérivée de $f : x \mapsto 2x|x|$ sur $\mathbb{R}^*$ et de $g : x \mapsto |x-1| - |x+2|$ sur un domaine à déterminer.
4. Calculer les limites $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x-1|-1}{x}$.

[1] à compléter

Solution –

Proposition – **Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$**
(i) La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec la somme :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R},\ \forall y, y' \in \mathbb{R}, \qquad x \leq x' \text{ et } y \leq y' \quad \Rightarrow \quad x+y \leq x'+y'$$

*(ii) La relation d'ordre sur l'ensemble des réels **positifs** est compatible avec le produit :*

$$\forall x, x' \in \mathbb{R},\ \forall y, y' \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq x \leq x' \text{ et } 0 \leq y \leq y' \quad \Rightarrow \quad 0 \leq xy \leq x'y'$$

(iii) Soit $x, y \in I$ un intervalle :

- *si f est croissante sur I alors $x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$*
- *si f est décroissante sur I alors $x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$*

Remarque : La troisième règle regroupe les situations suivantes :

- $x \leq y \quad \Rightarrow \quad -y \leq -x$
- $0 < x \leq y \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$
- $a \leq b$ et $c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad ac \leq bc$
- $a \leq b$ et $c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad ac \geq bc$

Attention ! On ne peut faire la différence de deux inégalités.
Si $a \leq b$ et $c \leq d$, on ne peut pas comparer $a - c$ et $b - d$; mais on a : $a - d \leq b - c$

Exercice : Soit $x \in [-2, 3]$ et $y \in [1, 2]$. Donner un encadrement de $x - y$, $x + 2y$, x^2y et $\dfrac{x}{y}$.

[2] à compléter

Solution –

Théorème – Les réels vérifient l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

Corollaire – *Les réels vérifient :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Exercice : Montrer que $x \mapsto \cos^2(x) - \cos(x) + 2$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

[3] à compléter

Solution –

Proposition - Définition – Partie entière
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier relatif tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Le nombre $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier minorant x.

[4] à compléter

Démonstration –

Exemple
Donner une CNS, écrite avec des quantificateurs, pour que $n \in \mathbb{Z}$ soit la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

[5] à compléter

Solution –

Exemple
$\lfloor 3,12 \rfloor = 3$, $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$. On a aussi $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Exercice : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

[6] à compléter

Solution –

[7] à compléter

Exercice : Donner un contre-exemple quand l'assertion est fausse :

	vrai	faux
(i) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor xy \rfloor = \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$	❑	❑
(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor = 2 \lfloor x \rfloor$	❑	❑
(iii) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 2 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2$	❑	❑
(iv) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$	❑	❑
(v) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$	❑	❑

Définition –
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- *A est une **partie majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$. Le cas échéant, on dit que M est un **majorant** de A.*
- *A est une **partie minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $m \leq x$. Le cas échéant, on dit que m est un **minorant** de A.*
- *A est une **partie bornée** si A est majorée et minorée.*
- *A possède un **maximum** (resp. **minimum**), s'il existe un élément de A qui soit aussi un majorant (resp. minorant) de A. Le cas échéant, on le note $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).*

Exercice : Dire si $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $B =]3,5[$, $C = \left\{\frac{x^2}{x^2+1}; x \in \mathbb{R}\right\}$, $D = \{e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}\}$ et $E = \{(-2)^n, n \in \mathbb{N}\}$ possède un majorant, minorant, maximum, minimum.

[8] à compléter

Solution –

2 Applications

2.1 Notion d'applications

Définition – Application
On définit une application, ou fonction, f en donnant un ensemble E dit de départ, un ensemble F dit d'arrivée et, pour tout x élément de E, un unique élement de F noté $f(x)$ et appelé image de x par f. L'élément x est alors appelé antécédent de $f(x)$.
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E,F)$.

Remarques –
1. Notation $f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}\right.$ ou $f : E \to F$ ou encore $E \xrightarrow{f} F$.
2. Soit f une application de E dans F. Tout élément de E a une unique image; en revanche un élément de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.
3. Le graphe d'une telle application est la représentation des points $\{(x, f(x)); x \in E\}$.
4. Une courbe Γ est le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des ordonnée coupe la courbe en "au plus" un point.

Exemple

$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & 2^x \end{array}\right.$, $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \end{array}\right.$ et $h : \left\{\begin{array}{ccc} [0,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} x-1 \text{ si } x \in [0,1[\\ 2x-2 \text{ si } x \in [1,2[\\ 1-x \text{ si } x \in [2,3] \end{array}\right. \end{array}\right.$

Exercice : Combien y a-t-il d'applications de $\{1,2,3\}$ dans $\{4,5\}$. Donner les.

[9] à compléter

Solution –

Exercice : Quelle transformation graphique sur le graphe de f permet d'obtenir le graphe de

$$f_1 : x \mapsto f(a+x) \quad f_2 : x \mapsto f(x)+a \quad f_3 : x \mapsto af(x) \quad f_4 : x \mapsto f(a-x) \quad f_5 : x \mapsto f(ax) \text{ avec } a \neq 0$$

[10] à compléter

Solution –

Exercice : Comment résoudre graphiquement :

$$(1) \quad f(x) = \lambda \qquad\qquad (2) \quad f(x) \leq \lambda$$

[11] à compléter

Solution –

Définition – Application identité
Soit E un ensemble. L'application identité, noté id_E, de E dans E est définie par $x \mapsto x$.

Définition – **Composée de deux applications**
Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F$, $g : G \to H$ des applications. Si $F \subset G$, on appelle composée de f et de g (ou de f par g) et on note $g \circ f$ l'application $g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & H \\ x & \mapsto & g[f(x)] \end{array} \right.$

Exercice : Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ avec $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x - 2$. Que conclure ?

[12] à compléter

Solution –

Proposition – **Associativité de la composition**
Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ des applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. On note plus simplement $h \circ g \circ f$.

Définition – **Restriction. Prolongement**
Soient E_1, E_2, F des ensembles tels que $E_1 \subset E_2$, f une application de E_1 dans F et g une application de E_2 dans F. On suppose que, pour tout $x \in E_1$, $f(x) = g(x)$. On dit alors que f est la restriction de g à E_1 (noté $f = g_{|E_1}$) et g un prolongement de f à E_2.

Exemples
1. La restriction de $x \mapsto x^2$ à $\mathbb{R}_+$ est croissante. Celle sur $\mathbb{R}_-$ est décroissante.
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \end{array} \right.$ se prolonge par $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 2 \end{array} \right.$ ou $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq 1 \\ -1 \text{ si } x = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$

Injectivité. Surjectivité. Bijectivité

Définition – **Application injective**
On dit qu'une application $f : E \to F$ est injective si tout $y \in F$ admet au plus un antécédent, autrement dit si :

$$\text{pour tout } (x_1, x_2) \in E^2, \text{ si } f(x_1) = f(x_2) \text{ alors } x_1 = x_2,$$

ou encore si :

$$\text{pour tout } (x_1, x_2) \in E^2, \text{ si } x_1 \neq x_2 \text{ alors } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Remarque – Soit Γ le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est injective ssi toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe Γ en au plus un point.

Définition – **Application surjective**
On dit qu'une application $f : E \to F$ est surjective si tout $y \in F$ admet au moins un antécédent, autrement dit si :

$$\text{pour tout } y \in F, \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

Remarque – Soit Γ le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est surjective ssi toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe Γ en au moins un point.

Définition – **Application bijective**
On dit qu'une application $f : E \to F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si pour tout $y \in F$, y amet un et un seul antécédent :

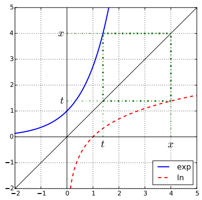
$$\text{pour tout } y \in F, \text{ il existe un unique } x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

Proposition – *Soit $f : E \to F$ une application. Pour $y \in F$, on considère l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x.*
- *f est injective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution,*
- *f est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution,*
- *f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution.*

Définition – **Application réciproque d'une bijection**
Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle application réciproque de f, et on note f^{-1}, l'application de F dans E qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f.

Proposition – *Soit $f \in E^F$ bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.*

Exemple
Les fonctions ln et exp sont des bijections réciproque l'une de l'autre :



- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(x)) = x$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(t)) = t$

Remarque : Les courbes de f et de f^{-1} sont symétrique par rapport à la première symétrique $(y = x)$.

Exercice : Étudier des *restrictions* bijectives des fonction $x \mapsto x^2$ et cos.

[13] à compléter

Solution –

2.2 Généralité sur les fonctions

➜ Travail sur l'ensemble de définition d'une application

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$. Le domaine de définition est l'ensemble des nombres réels tels que l'expression $f(x)$ existe :

$$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} ; x+1 \in \mathcal{D}_{\sqrt{}} \text{ et } x-2 \neq 0 \right\}$$

$\mathcal{D}_{\sqrt{}} = \mathbb{R}_+$ alors $x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = [-1, 2[\cup]2, +\infty[$.

Exercice : Donner le domaine de définition de

$$f : x \mapsto \ln(x^2 - 4x + 3) \qquad g : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-5x+4}\right) \qquad h : x \mapsto \sqrt{2x - \sqrt{x+1}}$$

Que dire de l'égalité $\ln(x^2 - 4x + 3) = \ln(x-1) + \ln(x-3)$?

[14] à compléter

Solution –

Définition – Fonction paire. Fonction impaire

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite paire (resp. impaire) si

- *pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $-x \in \mathcal{D}$*
- *et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).*

Exemple

Les fonctions cos, $x \mapsto 3 + x^2 - 5x^6$, $x \mapsto |x|$ sont paires.
Les fonctions sin, $x \mapsto x - 2x^7$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sont impaires.

Exercice : Montrer que toute application se décompose de façon unique comme la somme d'une application paire et d'une application impaire.

[15] à compléter

Solution – Procéder par analyse-synthèse.

Remarque – L'application f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$. L'application f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

Exercices :

1. Considérons f telle $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie, la droite d'équation $x = a$.
Donner une caractérisation analytique de cette propriété géométrique.
2. Même question pour g lorsque $\mathcal{C}_g$ qui admet le point de coordonnées (a, b) comme centre de symétrie.

[16] à compléter

Solution –

Exemples

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{-3x^2 - 11x - 16}{x^2 + 4x + 6}$ admet $\Omega(-2, -3)$ comme centre de symétrie de sa courbe.
2. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - 2\sin^2 x}$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie de sa courbe.

Définition – Fonction périodique

Soient $T > 0$ et $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite périodique de période T (ou T-périodique) si

- *pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $x + T \in \mathcal{D}$*
- *et $f(x+T) = f(x)$.*

Une fonction f est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.

Proposition – *Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est T-périodique, alors : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $x + nT \in \mathcal{D}$ et $f(x+nT) = f(x)$.*

[17] à compléter

Démonstration –

Faire une récurrence.

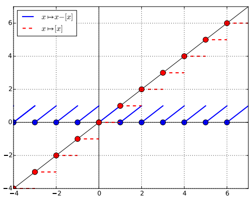
Remarque – Un fonction est de période T si et seulement si sa courbe est stable par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exercice : Montrer que tout multiple entier d'une période est encore une période.

[18] à compléter

Solution –

Exemples



1. Les fonctions sin et cos sont 2π-périodique. La fonction tan est π-périodique.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions constantes sont α-périodique
3. La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $k \mapsto (-1)^k$ est 2-périodique sur $\mathbb{Z}$.
5. La fonction $\cos_{|\mathbb{R}_+}$ n'est pas périodique car $\mathbb{R}_+$ n'est pas stable par translation.

Exercice : Soit f une fonction T-périodique.
1. Montrer que $g : x \mapsto f(\alpha x)$ est périodique et donne une période.
2. Donner une fonction dont la plus petit période est 5.

[19] à compléter

Solution –

Définition – Fonction majorée. Fonction minorée. Fonction bornée

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite :
- *majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on ait $f(x) \leq M$.*
- *minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on ait $f(x) \geq m$.*
- *bornée si elle est à la fois minorée et majorée.*

Proposition – *Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.*

[20] à compléter

Démonstration –

Définition – Somme, produit

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$:
- *la somme de f et g est la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$ définie sur $\mathcal{D}$;*
- *la produit de f et g est la fonction $x \mapsto f(x) \times g(x)$ définie sur $\mathcal{D}$.*

Remarque – On fait la différence entre la somme de deux nombres et la sommes de deux applications ou encore la somme de deux couples de coordonnées ou de deux matrices etc.

Définition – Fonction croissante

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite :
- *croissante sur $\mathcal{D}$ lorsque, pour tout $x, y \in \mathcal{D}$, si $x < y$ alors $f(x) \leq f(y)$,*
- *strictement croissante sur $\mathcal{D}$ lorsque, pour tout $x, y \in \mathcal{D}$, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.*
- *décroissante sur $\mathcal{D}$ lorsque, pour tout $x, y \in \mathcal{D}$, si $x < y$ alors $f(x) \geq f(y)$,*
- *strictement décroissante sur $\mathcal{D}$ lorsque, pour tout $x, y \in \mathcal{D}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.*
- *monotone sur $\mathcal{D}$ (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur $\mathcal{D}$.*

Exemple

- Une fonction f vérifiant $f(1) = 2$ et $f(2) = 0$ est non-croissante : écrire la définition d'une fonction non-croissante pour s'en convaincre.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice : Dans chacune situation donner un exemple graphique :

(a) une fonction à la fois croissante et décroissante

(b) une fonction ni croissante ni décroissante
(c) une fonction ni minorée, ni majorée

[21] à compléter

Solution –

Exercice : Montrer que si f est strictement croissante, alors f est injective.

[22] à compléter

Solution –

Exemple

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

- strictement croissante si $\alpha > 0$,
- constante égale à 1 si $\alpha = 0$,
- strictement décroissante si $\alpha < 0$.

Proposition – *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.*
Si f et g sont monotones de même sens, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
Si f et g sont monotones de sens contraire, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

[23] à compléter

Démonstration –

Exemple

Décomposition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}$: pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \underset{\nearrow}{\to} \sqrt{x} \underset{\nearrow}{\to} \sqrt{\sqrt{x}} \underset{\searrow}{\to} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}$. Ainsi, f est décroissante.

2.3 Continuité et dérivabilité

2.3.1 Définitions

Définition – Continuité
Soit $f \in \mathbb{R}^E$ et $x_0 \in E$, On dit que f est continue en x_0 si :
(i) $\exists \alpha > 0;\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset E$ *ou* $]x_0 - \alpha, x_0[\subset E$ *ou* $]x_0, x_0 + \alpha[\subset E$
(ii) $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$
On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point de E

Définition – Dérivabilité
Soit $f \in \mathbb{R}^E$ et $x_0 \in E$, On dit que f est dérivable en x_0 si :
(i) $\exists \alpha > 0;\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset E$ *ou* $]x_0 - \alpha, x_0[\subset E$ *ou* $]x_0, x_0 + \alpha[\subset E$
(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R};\ \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$
le taux d'accroissement en x_0 admet une limite finie en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivée en x_0 ; on la note $f'(x_0)$.
On dit que f est dérivable sur E si f est dérivable en tout point de E

Exercice : Étudier la dérivabilité de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$.

[24] à compléter

Solution –

Proposition – *Considérant deux applications continues (resp. dérivables), alors la somme, le produit, le quotient, la composée sont continues (resp. dérivables) sur leur domaine d'existence.*

Exercice : Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de $g : x \mapsto |x^2 - 3x + 2|$.

[25] à compléter

Solution –

Rappel : Équation d'une droite non verticale :

- passant par deux point du plan, (x_1, y_1) et (x_2, y_2) : $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$
- passant par le point (x_1, y_1) et de coefficient directeur a : $y = a(x - x_1) + y_1$

Équation de la tangente de f en x_0 (lorsque f est dérivable en x_0) :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2.3.2 Propriétés

Théorème – Formules de dérivation

(i) Soit $f, g \in \mathbb{R}^E$ deux fonctions dérivables sur E et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables sur E :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \text{ et } (fg)' = f'g + fg'.$$

Si de plus g ne s'annule pas sur E, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur E :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \text{ donc } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(ii) Soit $f \in \mathbb{R}^E$ et $g \in \mathbb{R}^G$ telles que pour tout $x \in E$, $f(x) \in G$, f est dérivable sur E et que g est dérivable sur G ; alors $g \circ f$ est dérivable sur E :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

(iii) Soit $f \in \mathbb{R}^I$ continue et strictement monotone sur un intervalle I. f réalise une bijection de I sur $f(I)$; on note f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $f(I)$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ de dérivée :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemples

1. $\left((x^2+1)^5\right)' = 5 \times 2x \times (x^2+1)^4$ et $\left(e^{x^3}\right)' = 3x^2 e^{x^3}$.
2. exp est dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivé, exp, ne s'annule pas donc sa fonction réciproque, ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

3. $f : x \mapsto (x-2)^2 + 1$ réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $[1, +\infty[$ de fonction réciproque $x \mapsto -\sqrt{x-1} + 2$. Sa dérivée $f' : x \mapsto 2(x-2)$ s'annule en 2 avec $f(2) = 1$ donc f^{-1} est dérivable sur $[1, +\infty[\setminus\{1\}$ et

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{2\left((-\sqrt{x-1}+2)-2\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

[26] à compléter

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$3x^2$		$4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$	
$\ln(x) + e^{2x}$		$\cos(x) + \sin(x)$	
$\tan(x)$		$x \ln(x)$	
$\frac{3+x}{1-x}$		$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	
$e^{\sqrt{x}+1}$		$\ln(\cos(x))$	
$(3x^2+1)^6$		$\frac{2x}{(1+x)^4}$	
$u(x)^n$		$\frac{1}{u(x)}$	
$e^{u(x)}$		$\cos(u(x))$	

Exemple

La rédaction peut se faire en plusieurs étapes :

$$\left(\cos\left(\sqrt{e^x+x^2}\right)\right)' = \left(\sqrt{e^x+x^2}\right)' \times \left(-\sin\left(\sqrt{e^x+x^2}\right)\right)$$
$$= \frac{e^x+2x}{2\sqrt{e^x+x^2}} \times \left(-\sin\left(\sqrt{e^x+x^2}\right)\right)$$

Proposition – **Caractérisation des fonctions constantes, positives**

Soit $f \in \mathbb{R}^I$, dérivable sur l'intervalle I :
(i) f est constante si et seulement si f' est nulle
(ii) f est croissante [resp. décroissante] si et seulement si f' est positive [resp. négative].

Le résultat précédent, qui sera établi dans un chapitre ultérieur, est un outil servant à construire les tableaux de variations.

2.3.3 Dérivées successives

Définition –

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$; on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}$ et si de plus, f' est continue sur $\mathcal{D}$. On note $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$.

Remarque –

- $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$
- $\mathcal{D}^1(\mathcal{D})$ est l'ensemble des fonctions continues et dérivables de $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}^1(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$$

Les inégalités sont stricte : $x \mapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \backslash \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\quad x \mapsto |x| \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.

Exercice : Montrer que $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \in \mathcal{D}^1(\mathcal{D}) \backslash \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$

[27] à compléter

Solution –

Définition – **Dérivées successives**

- *Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$. On dit que f est deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$ si f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et si f' est également dérivable sur $\mathcal{D}$. On note f'' la dérivée de f' et on l'appelle dérivée seconde de f.*
- *Plus généralement, on définit par récurrence la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$. On pose $f^{(0)} = f$. Pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable sur $\mathcal{D}$ si elle est $n-1$ dérivable sur $\mathcal{D}$ et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$. On note alors alors $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.*

Remarque – La dérivabilité est une notion locale, aussi la définition précédente présuppose qu'en tout point x_0 de $\mathcal{D}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset \mathcal{D}$ pour pouvoir travailler sur des limites en x_0.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{N}$ alors $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{r!}{(r-n)!}x^{r-n} & \text{si } n < r \\ r! & \text{si n=r} \\ 0 & \text{si } n > r \end{cases}$

Exemple

Considérons la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \ln^{(2)}(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \ln^{(3)}(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3} \quad \ln^{(4)}(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{x^4}$$

Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Attention ! Après avec conjecturer le résultat, il convient de faire une récurrence pour le prouver.

Remarque – Lorsqu'une fonction est infiniment dérivable, c'est-à-dire dérivable à tout ordre, on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice :

1. Que dire de la dérivée d'une fonction paire ? D'une dérivée d'une fonction impaire ?

2. Déterminer la dérivée d'ordre n de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

[28] à compléter

Solution –

2.3.4 Dérivées partielles

▶ Lorsque l'expression d'une fonction, f, dépend d'une variable et n'a pas de paramètre, alors la dérivation se fait par rapport à la seule variable, x : on la note $f'(x)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

▶ Lorsque l'expression dépend de plusieurs variables, la dérivabilité suivant l'une ou l'autre des variables est possible. Pour dériver par rapport à une variable, on considère les autres comme des paramètres : on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Exemple

Considérons $f : (x, y, z) \mapsto x^2 \cos(x + y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -x^2\sin(x+y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0$$

3 Étude d'une fonction

Objectif : L'étude d'une fonction est motivée par l'obtention de sa représentation graphique ou l'établissement d'inégalités ou encore la recherche d'extremum.

➜ Plan d'étude :

- Domaine de définition
- Domaine d'étude par restriction du domaine de définition (propriété de parité ou périodicité)
- Domaine de continuité, de dérivabilité
- Calcul de la dérivée et détermination de son signe
- Tableau de variations
- Étude des limites et branches infinies
- Représentation graphiques

3.1 Réduction du domaine d'étude

Les propriétés d'une fonction peuvent nous permettre de réduire le domaine d'étude. Par la suite, les propriétés géométriques résultantes de ces propriétés analytiques permettent de reconstituer la courbe sur son domaine de définition :

▶ Si la fonction est paire, alors le domaine d'étude peut être réduit à $\mathcal{D}_e = \mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$. Il suffit d'effecteur une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour retrouver la courbe.

▶ Si la fonction est impaire, alors le domaine d'étude peut être réduit à $\mathcal{D}_e = \mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$. Il suffit d'effecteur une symétrie centrale par rapport à l'origine pour retrouver la courbe.

▶ Si la fonction est T-périodique, alors le domaine d'étude peut être réduit à $\mathcal{D}_e = \mathcal{D} \cap [x_0, x_0 + T[$. Il suffit d'effecteur des translations successives de vecteur $T\,\overrightarrow{i}$ pour retrouver la courbe.

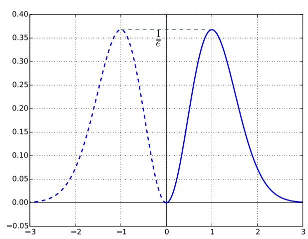
Les réductions peuvent se cumuler.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 e^{-x^2} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction paire. Le domaine d'étude est $\mathbb{R}_+$.

La dérivée est $f'(x) = e^{-x^2}(2x - 2x^3) = 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



Exemple

Résolution sur $\mathcal{D}_{\tan}$ de (E) : $\quad \tan(x)\left(\cos(x) - \dfrac{1}{2}\right) \geq 0$

Comme $g : x \mapsto \tan(x)\left(\cos(x) - \dfrac{1}{2}\right)$ est 2π-périodique, réduisons le domaine d'étude à $\mathcal{D}_{\tan} \cap [0, 2\pi[$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\tan(x)$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$		$-$	0
$\cos(x) - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0

Ainsi, $\mathcal{S}_{(E)} = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$

Exercice : Soit $f : x \mapsto \sin^3(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. Justifier que le domaine d'étude peut être réduit à $[0, \pi]$.
2. On note que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(\pi - x) = f(x)$; en déduire que le domaine d'étude peut être réduit à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Comment retrouver la courbe de f à partir de celle de sa restriction sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$?
4. Étudier et tracer f.

[29] à compléter

Solution –

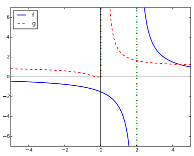
3.2 Branches infinies

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)); x \in I\}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On appelle branche infinie toute partie de la courbe dont une des composantes (celle de x ou celle de $f(x)$) tend vers l'infini.

▶ **Asymptote en $x_0 \in \mathbb{R}$:**
On suppose que f admet $\pm\infty$ pour limite en x_0. Alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

Exemple

- $f : x \mapsto \dfrac{3}{x-2}$
- $g : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

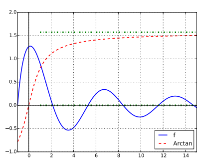


▶ **Étude du comportement en $+\infty$:** (idem en $-\infty$)

♦ Si $\lim\limits_{+\infty} f = b \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

Exemple

- $f : x \mapsto \dfrac{3\sin(x+1)}{x+2}$
- Arctan

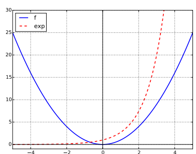


♦ Si $\lim\limits_{+\infty} = \pm\infty$, alors on étudie $\frac{f(x)}{x}$:

♣ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y'Oy$

Exemple

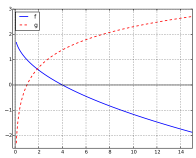
- $f : x \mapsto x^2$
- exp



♣ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $x'Ox$

Exemple

- $f : x \mapsto 2 - \sqrt{x}$
- ln

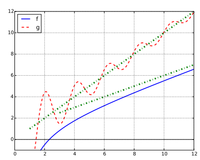


♣ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, on étudie $f(x) - ax$:

♠ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote d'équation $y = ax + b$,

Exemple

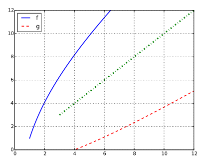
- $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x - 10}{2x}$
- $g : x \mapsto \dfrac{x^2 + 5\cos(3x)}{x+2}$



♠ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple

- $f : x \mapsto x + 3\ln(x)$
- $g : x \mapsto x - 2\sqrt{x}$



Remarque – La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote est donné par le signe de $f(x) - ax - b$ (positif : au-dessus ; négatif : en dessous).

Exemple

Soit pour $x \neq -1$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. Alors $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$.
La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.
Par ailleurs la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en -1.

3.3 Formes indéterminées

Une situation de "*FI*" correspond à une expression dont on ne peut déterminer s'il elle possède une limite, ni si cette éventuelle limite est finie ou infinie ...
Il convient d'étudier davantage l'expression pour éventuellement lever l'indétermination par :

- une simplification de l'expression ;
- ou la mise en évidence de *limites usuelles* comme :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- ou la mise en évidence de *croissances comparées* comme :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Les différents formes indéterminées sont :

- "$0 \times \infty$" ou "$\dfrac{0}{0}$" ou encore "$\dfrac{\infty}{\infty}$" : $\dfrac{x^3}{x^2} = x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{2x^2 + x}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2$
- "$\infty - \infty$" : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}(x-1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- "0^0" : $x^x = e^{x\ln(x)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \left(e^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- "1^∞" : $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(-x \underbrace{\dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Remarque – "$\dfrac{0}{\infty}$" n'est pas une "*FI*", la limite est nulle.
"$\dfrac{\infty}{0^+}$" et "$\dfrac{\infty}{0^-}$" ne sont pas des "*FI*", leur limite est infinie et la règle des signes permet de conclure.
"$\dfrac{\infty}{0}$" possède une indétermination sur le signe qui empêche de conclure : c'est donc aussi une "*FI*".

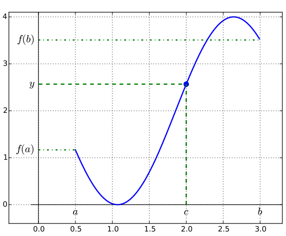
Exercice : Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que $\dfrac{1}{f}$ n'admet pas de limite en 0.

[30] à compléter

Solution –

3.4 Tableau de variations

Théorème – **Valeurs intermédiaires**
Soit f continue sur $[a, b]$. Pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



Théorème – **Bijection - corollaire du TVI**
Soit f continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors $f(I) = \{f(x); x \in I\}$ est un intervalle et f réalise une bijection de $f(I)$ sur I.
De plus, f^{-1} sa bijection réciproque est continue et strictement monotone de même variation que f.

3.4.1 Application 1 : existence d'une solution à une équation

Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un antécédent et donc une solution à une équation.

Exemple

Considérons (E) : $\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 0$

La fonction $f : x \mapsto \cos^2(x) + 2\cos(x) - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ et $f(0) = 2 > 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(x) = 0$.

3.4.2 Application 2 : existence et unicité d'une solution à une équation

Le théorème de la bijection donne l'existence et l'unicité d'un antécédent et donc d'une solution à une équation. En particulier, ce résultat est est utilisé pour établir l'existe des suites définies implicitement (on étudiera ces suites ultérieurement).

Exemple

Montrons qu'il existe une unique suite telle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(u_n) = \dfrac{1}{n}$ avec $u_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; d'après le théorème de la bijection, cos réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \in [0, 1]$ donc il existe un unique nombre de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, noté u_n, tel que $\cos(u_n) = \dfrac{1}{n}$.

➜ Par conséquent, on peut dénombrer le nombre exacte de solutions d'une équation en travaillant sur chaque morceau où la fonctioàn associée est strictement monotone.

3.4.3 Application 3 : obtention d'encadrements

Pour encadrer une expression d'une variable, on considère l'expression sur chaque morceau où elle est monotone et on réunit les encradrements obtenus.

Exemple

Encadrons $x + x^2$ sur $[-1, 2]$.

Soit $h : x \mapsto x + x^2$, alors $h'(x) = 2x + 1$

Ainsi, $-1 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{4} \leq x + x^2 \leq 6$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	6

3.4.4 Application 4 : établir des inégalités fonctionnelles

Pour établir une inégalité, on peut considérer la fonction différence et l'étudier pour en déterminer son signe.

Exemple

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

Soit $f : x \mapsto \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$, il vient :

$$f'(x) = -\sin(x) + x$$
$$f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Exercice : Montre que **Prog**

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$

(ii) $\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x$

[31] à compléter

Solution –

3.4.5 Application 5 : recherche d'extremums

Définition – **Extremum local**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
On dit que f admet un extremum local en x_0 s'il admet un maximum ou un minimum local en x_0.

Un tableau de variations permet d'identifier les extremums.

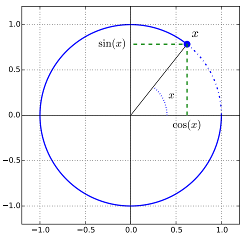
Exemple
Considérons g telle que

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g(x)$			4				1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2		

g possède un minimum local en 3 de valeur -2 et une maximum global en 1 de valeur 4.

4 Fonctions usuelles

4.1 Trigonométrie



Définition – **Cercle trigonométrique**
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de rayon 1 centré à l'origine d'un repère orthonormé et muni d'une orientation de la mesure d'angle.
On définit les fonctions cos *et* sin *en $x \in \mathbb{R}$ respectivement par l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle qui correspond à l'angle x (ou à la longueur algébrique de l'arc associé à partir de point de coordonnée $(0, 1)$).*

Proposition – *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.*

[32] à compléter

Démonstration –

■

Exercice : Sachant que $x \in [\pi, 2\pi]$ et $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$, déterminer $\sin(x)$.

[33] à compléter

Solution – ■

Définition – **Relation de congruence**
Soit a, b, c trois nombres. On dit que a est congru à b modulo c, noté $a \equiv b\ [c]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kc$.

Exercice : Soit a, b, c, d des nombres avec $d \neq 0$ alors : $da \equiv b\ [c] \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv \dfrac{b}{d}\ \left[\dfrac{c}{d}\right]$

[34] à compléter

Solution – ■

Exemples
1. $n \equiv 0\ [2]$ si et seulement si n est pair
2. Comme la longueur du cercle trigonométrique est 2π ,alors pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \equiv y\ [2_pi]$, x et y sont des mesures angulaires du même point.

Un point du cercle trigonométrique ne possède pas un mesure angulaire unique, mais on peut dire qu'elle unique à 2π-près.

[35] à compléter

Exercice : Utilisant des propriétés de symétries dans le cercle trigonométrique, simplifier les relations suivantes en $\pm\cos(x)$ ou $\pm\sin(x)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\dots \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\dots \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\dots \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\dots$$
$$\cos(\pi+x)=\dots \qquad \sin(\pi+x)=\dots \qquad \cos(\pi-x)=\dots \qquad \sin(\pi-x)=\dots$$
$$\cos(-x)=\dots \qquad \sin(-x)=\dots \qquad \cos(x+k\pi)=\dots \qquad \sin(x+k\pi)=\dots$$
$$cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\dots \qquad \sin(x-3\pi)=\dots \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=\dots \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)=\dots$$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(1):\cos(x)=0 \qquad (2):\sin(x)=0 \qquad (3):\cos(x)=\cos(y) \qquad (4):\sin(x)=\sin(y) \qquad (5):\cos(x)=\sin(2x)$$

[36] à compléter

Solution –

Proposition - Définition – Tangente

Soit $\mathcal{D}=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$ *on a aussi* $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$. *On définit la fonction tangente par :* $\tan: \begin{array}{ccc}\mathcal{D} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\end{array}$

(i) $\forall x\in\mathcal{D},\quad \tan(x+\pi)=\tan(x) \qquad \tan(\pi-x)=-\tan(x) \qquad \tan(-x)=-\tan(x)$

(ii) tan *est un fonction impaire et* π*-périodique.*

Exercice : Pour $x\in\frac{\pi}{2}+\mathcal{D}$, simplifier $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)$.

[37] à compléter

Solution –

➜ Table des valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X

Exercice : Utiliser les symétries dans le cercle trigonométrique pour compléter ce qui suit :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\dots \qquad \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\dots \qquad \tan\left(-\frac{14\pi}{3}\right)=\dots \qquad \cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\dots$$
$$\cos\left(\dots\right)=-\frac{1}{2} \qquad \sin\left(\dots\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\left(\dots\right)=-\sqrt{3} \qquad \sin\left(\dots\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[38] à compléter

Solution –

➜ Formules de trigonométrie : on suppose que x,y,a,b sont tels que les expressions suivantes sont bien définies :

Proposition – Formule d'addition

(i) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

(ii) $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

(iii) $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

(iv) $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

(v) $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

(vi) $\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

Proposition – Formule de duplication

(vii) $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$

(viii) $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

(ix) $\tan(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Proposition – **Transformation de produit en somme**

$$\text{(x)} \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$$

$$\text{(xi)} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

$$\text{(xii)} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$$

Proposition – **Transformation de somme en produit**

$$\text{(xiii)} \quad \cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\text{(xiv)} \quad \cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\text{(xv)} \quad \sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\text{(xvi)} \quad \sin(x)-\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Proposition – **Expression en fonction de $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$**

$$\text{(xvii)} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\text{(xviii)} \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\text{(xix)} \quad \tan(x) = \frac{2u}{1-u^2}$$

[39] à compléter

Démonstration –

Démontrer (i) et (ii) puis déduire les autres formules. ■

Lemme –

$$\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

[40] à compléter

Démonstration – ■

Proposition – *Les fonctions* cos, sin *et* tan *sont dérivables sur leur domaine de définition. En particulier :*

- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin'(x) = \cos(x) \qquad$ *et* $\qquad \cos'(x) = -\sin(x)$
- $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

[41] à compléter

Démonstration – ■

Exercice : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$. **Prog**

[42] à compléter

Solution – Procéder par disjonction de cas et par l'étude de fonctions ad-hoc. ■