DM 11

à rendre le mardi 14 janvier 2025

Méthode de Newton

Description : cette méthode permet la résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$, sous certaines hypothèses. Cette méthode est aussi appelée *méthode des tangentes.*

Soit I un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, c'est-à-dire que f est deux fois dérivable et que f' et f'' sont continues. De plus :

(1) il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$,
(2) $f' > 0$,
(3)$f'' \geq 0$.

1. Montrer que α est l'unique réel vérifiant $f(\alpha) = 0$.
2. a) Soit $x_0 \in I$, donner l'équation de la tangente à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, en $(x_0, f(x_0))$.
b) En déduire l'expression, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$, de l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de f en $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des abscisses.
c) On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in I$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Représenter graphiquement une telle suite sur un exemple de votre choix.
Vers quel réel semble-t-elle converger ?
3. a) Montrer que pour tous réels x et t, on a :

$$f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t).$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \alpha$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
c) En déduire la convergence et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. **Application informatique en Python :** Prog

a) Compléter la fonction `derive(f,a)` qui retourne l'approximation suivante de $f'(a)$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{(avec } h = 10^{-10}\text{)}$$

```python
def derive(f,a):
    h=1e-10
    return(...)
```

b) Donner le script d'une fonction `newton(f,u0,n)` qui retourne le terme de rang n de la suite définie en 2c).

c) (i) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \exp(x) - 2$ vérifie les hypothèses de la méthode de Newton sur $I = \mathbb{R}$ et préciser la racine de g.

(ii) Appliquer la fonction `newton` à g avec $u_0 = 1$ et remplir le tableau suivant qui renseigne les premiers termes de la suite et la précision obtenue :

n	u_n	$\lvert u_n - \ln(2)\rvert$
2		
3		
4		
5		

5. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $h : x \mapsto x^2 - r$.

a) Montrer que la fonction h vérifie les hypothèses de la méthode de Newton.

b) Donner la relation de récurrence de la suite associée à la méthode Newton.

c) Donner le script d'une fonction `rc(r,n)` qui retourne le terme de rang n de la suite pour $u_0 = 1$.

d) Donner le script d'une fonction `rc2(r,p)` qui retourne une approximation de $\sqrt{r}$ par le premier terme u_n vérifiant :

$$|u_{n-1} - u_n| \leq p$$