

Nombres réels et suites numériques

LES NOMBRES RÉELS

Exercice 7.1 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 7.2 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer, s'ils existent, $\inf(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$ et $\max(A)$, dans les cas suivants :

$$A = \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi}{7}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad B = \left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \left(1 + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \ln(n) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad D = \left\{ \frac{1 + \cos(n)}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 7.3 * Soit $X \subset \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{R}^X$ deux fonctions majorées. On note

$$\sup(f) = \sup\{f(x); x \in X\}$$

1. Montrer que $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$.
2. Donner deux fonctions telles que l'inégalité précédente est stricte.

Exercice 7.4 A et B sont deux parties non disjointes de \mathbb{R} telles que $A \cup B$ est majorée. Montrer que $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\sup(A \cap B)$ et $\sup(A \cup B)$ existent et trouver, en les justifiant, des relations entre ces réels

Exercice 7.5 * * Soit A une partie bornée non vide de \mathbb{R} . Montrer que :

$$\sup_{x, y \in A} |x - y| = \sup(A) - \inf(A)$$

Exercice 7.6 * *

Prog

Soit X une partie non vide de \mathbb{R} . Montrer que

- (i) si X est majorée, il existe une suite d'élément de X qui converge vers $\sup(X)$,
- (ii) si X n'est pas majorée, il existe une suite d'élément de X qui tend vers $+\infty$.

GÉNÉRALITÉ SUR LES SUITES RÉELLES

Exercice 7.7

1. La somme de deux suites majorées est-elle une suite majorée ?
2. Le produit de deux suites majorées est-il une suite majorée ?

Exercice 7.8

Soit u une suite à valeurs dans \mathbb{R} telle que, pour tout $k, n \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$|u_n| \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Exercice 7.9 Que dire d'une suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} ?

Exercice 7.10

Méthode

Étudier les variations des suites dont le terme général est :

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}, \quad b_n = \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 + 1}, \quad c_n = - \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{n^2}{k}\right)$$

Exercice 7.11 Montrer que les suites suivantes sont bornées :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{n}, \quad v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}, \quad w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Exercice 7.12 Déterminer les limites des suites ($a, b > 0$) :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad v_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}, \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad t_n = \frac{n!}{n^n}.$$

INÉGALITÉ ET MONOTONIE

Exercice 7.13 Considérer la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}}$$

1. Réécrire u_n avec le symbole \sum .
2. Encadrer le plus finement possible le terme général de la somme puis en déduire un encadrement de u_n
3. Utilisant le théorème des encadrements, en déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 7.14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

On rappelle que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

1. Donner un encadrement de $\ln(u_n)$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Exercice 7.15 Soient a et b deux suites prenant leurs valeurs dans $[0, 1]$. On suppose que la suite produit $a.b$ converge vers 1.

1. Comparer les suites a , b et $a.b$.
2. En déduire que a et b convergent et déterminer leur limite.

Exercice 7.16

Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leq b$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de la suite $(b_n - a_n)$ en considérant $b_{n+1} - a_{n+1}$.
2. Déterminer le signe de $a_{n+1} - a_n$. En déduire la variation de (a_n) .

3. Étudier la variation de la suite (b_n) .

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

5. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

6. Montrer que la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0.

7. Que dire des suites (a_n) et (b_n) ?

La limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b .

Exercice 7.17 Soit (u_n) définie pour $n > 1$ par $u_n = \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)}$.

1. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Montrer que

$$\ln(k) \geq \int_{k-1}^k \ln(t) dt$$

2. Par sommation, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\ln(n!) \geq \int_1^n \ln(x) dx$

3. Vérifier que $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de \ln .

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, $u_n \geq 1 - \frac{n-1}{n \ln(n)}$

5. Prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 7.18 Considérons la suite (u_n) telle que $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$$

1. Exprimer u_{n+1}^2 en fonction u_n .

2. En déduire que (u_n) est croissante.

3. a) Que dire sur le comportement de (u_n) ?

b) Raisonant par l'absurde, montrer que la limite n'est pas finie.

c) Donner la limite de la suite.

4. Proposer une autre approche pour déterminer la limite éventuelle de (u_n) en minorant u_n , puis en utilisant le théorème de comparaison.

Exercice 7.19 Suite harmonique

Classique

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n}$

1. Quel est le sens de variation de cette suite ?
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. Raisonnant par l'absurde, en déduire la limite de la suite.

Exercice 7.20 Croissance logarithmique comparée

Soient $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$
 Montrer que si $b_n \rightarrow 0$, alors $a_n \rightarrow 0$.

Exercice 7.21

Méthode

- Comparer un nombre à u_n défini implicitement par $f_n(u_n) = 0$
- Considérer le signe de f_n :

x	u_n
$f_n(x)$	- 0 +

- si $f_n(a) \leq 0$ alors $a \leq u_n$ sinon $a > u_n$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P_n(x) = x^n + x - 1$.
1. Montrer qu'il existe un et un seul $x_n \in [0, 1]$ tel que : $P_n(x_n) = 0$.
 2. Étudier la monotonie de la suite (x_n) .
En déduire qu'elle converge vers $\ell \in [0, 1]$.
 3. Raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
 4. Montrer que, à partir d'un certain rang, $0 \leq 1 - x_n \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 7.22 Soit $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Méthode

1. Donner l'expression de $u_{2n} - u_n$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} - u_n$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. Montrer que pour tout $k \geq 2$

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

4. En déduire une comparaison de $\frac{1}{2\sqrt{k}}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ et $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.
5. Donner un encadrement de $u_n - 2\sqrt{n}$.
6. Montrer que $(u_n - 2\sqrt{n})$ est bornée.
7. Montrer que $(u_n - 2\sqrt{n})$ converge.

SUITES EXTRAITES

Exercice 7.23 Soit (u_n) une suite réelle. Parmi les affirmations qui suivent, dire lesquelles sont vraies. Justifier.

1. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .
2. Si $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.
3. Si (u_{kn}) converge, pour tout $k \geq 2$, alors (u_n) converge. ❄️❄️
4. Si (u_n) est monotone et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite qui tend vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ . ❄️❄️

Exercice 7.24 Montrer qu'une suite non majorée possède une sous-suite divergente.

Exercice 7.25

1. Soient $[a, b]$ un intervalle fixé de \mathbb{R} (a et b réels, $a < b$) et $N \geq 1$ un entier fixé. Montrer que l'ensemble des rationnels de $[a, b]$ dont le dénominateur est inférieur ou égal à N est un ensemble fini (chaque rationnel est supposé mis sous forme canonique).
 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge dans \mathbb{R} , ℓ sa limite.
On note, pour chaque n , $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec p_n et q_n premiers entre eux.
- a) Montrer que si $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, ℓ est rationnel.
 - b) Montrer que, plus généralement, si q_n ne tend pas vers $+\infty$, ℓ est rationnel.
 - c) Peut-on affirmer que, si q_n tend vers $+\infty$, ℓ est irrationnel ?

Exercice 7.26 Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi.

COMPARAISON

Exercice 7.27 Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité ;

$$(i) \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln(n)}{n}, \frac{\ln(n)}{n^2}, \frac{1}{n \ln(n)} \quad (ii) n, n^2, n \ln n, \sqrt{n} \ln(n), \frac{n^2}{\ln(n)}.$$

Exercice 7.28 En discutant suivant les valeurs de a et b , donner un équivalent en $+\infty$ de :

$$\frac{an^3 + 5n - 2}{bn^2 + 2n + 3}$$

Exercice 7.29 Trouver les limites de :

$$u_n = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\sin \frac{1}{n}} \quad v_n = \frac{\exp\left(\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n}}\right) - e}{\tan \frac{1}{n}}$$

$$w_n = n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{n^2}{2} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \quad t_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

Exercice 7.30 Trouver un équivalent simple pour chacune des suites ci-dessous et donner leur limite éventuelle :

$$(i) \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}, \quad (ii) \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}, \quad (iii) (n + 3 \ln(n))e^{-(n+1)},$$

$$(iv) \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}}, \quad (v) \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1}, \quad (vi) \sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1},$$

$$(vii) \sqrt{\ln(n + 1) - \ln(n)}, \quad (viii) \sin \frac{1}{\sqrt{n + 1}}, \quad (ix) \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right).$$

Exercice 7.31 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $u_n = \sum_{k=0}^n k!$. Montrer que $u_n \sim n!$.

Exercice 7.32

Classique

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $P_n = X^5 + nX - 1$.

1. Montrer que P_n a une unique racine dans $[0, 1]$. On la note u_n .
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer qu'elle converge vers 0.
3. Montrer que $nu_n \rightarrow 1$. En déduire un équivalent simple de u_n .
4. Donner un équivalent de $nu_n - 1$. En déduire :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

SUITES PARTICULIÈRES

Exercice 7.33

Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$$

Exercice 7.34 Exprimer en fonction de n les suites suivantes :

1. $u_3 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - 3u_n$
3. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$
4. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 6u_{n+2} - 5u_{n+1} = -u_n$
5. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$
6. $u_0 > 0, u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$

Exercice 7.35 Soient u, v les suites définies par : $u_0 = -2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 - u_n} \quad v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

1. Montrer que la suite v est géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 7.36 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite vérifiant :

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{u_n}\right).$$

1. Poser $v_n = e^{u_n}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (v_n) .
2. Expliciter (v_n) , puis (u_n) et donner l'éventuelle limite de (u_n) .

Exercice 7.37

Classique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On désire calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A et I_3 .
2. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I_3$.
En particulier, donner une relation de récurrence sur (a_n) et (b_n) .
3. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de a_n et b_n en fonction de n puis l'expression de A^n en fonction de A , I_3 et n .

Exercice 7.38

1. Une grenouille monte un escalier de 13 marches. Elle ne peut progresser que par sauts d'une ou deux marches. De combien de façons différentes peut-elle arriver au sommet ?

On remarquera qu'une progression de la grenouille est une suite de 1 et de 2 dont la somme vaut 13.

2. On suppose maintenant que l'escalier comporte n marches ($n \in \mathbb{N}^*$). On note G_n le nombre de progressions possibles jusqu'au sommet.
Établir une relation de récurrence entre G_{n+2} , G_{n+1} et G_n .
En déduire G_n .

Exercice 7.39 *Solution particulière* *

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n = n \end{cases}$ (★)

1. Chercher une suite vérifiant (★) sous la forme $v_n = an + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
C'est-à-dire, remplacer u_n par l'expression de v_n dans (★) et déterminer les valeurs de a et b pour que l'égalité soit vraie pour tout n .
2. On introduit la suite de terme général $w_n = u_n - v_n$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par (w_n) .

3. Expliciter la suite (w_n) puis la suite (u_n) .

Exercice 7.40 **

Méthode

Soient $a > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - au_n^2.$$

Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.41 **

Méthode

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1 + 2u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$ et décroissante et que la suite $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{2}$ et croissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 7.42 *Méthode de Héron d'Alexandrie* **

Soient $a > 0$, $u_0 > \sqrt{a}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer qu'elle converge vers \sqrt{a} .
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.$$

En déduire une majoration de $u_n - \sqrt{a}$ par une expression dépendant de n , a et $u_0 - \sqrt{a}$.

3. On prend $a = 5$ et $u_0 = 2,4$. Déterminer n pour que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-10} près.

Exercice 7.43

Étudier les suites définies par : $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$.