Corrigé du DM 13

Formule de Stirling

Partie A - Intégrale de Wallis

1. $\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t = \left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leq \cos(t) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (\cos(t))^{n+1} \leq (\cos(t))^n$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Ainsi , $\boxed{\text{la suite } (W_n) \text{ est décroissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction cos est positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Par stricte positivité de l'intégrale (l'intégrale d'une fonction positive, continue et non constante nulle est strictement positive) on a $W_n > 0$.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n > 0}$

Attention ! $W_n \geq 0$ était facile à obtenir au 2a) mais $W_n > 0$ nécessite de citer plus précisément le théorème de positivité stricte de l'intégrale.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(\cos(t))^{n+1}\mathrm{d}t$.
Effectuons une intégration par parties avec $u : t \mapsto (\cos(t))^{n+1}$ et $v : t \mapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{cases} u(t) = (\cos(t))^{n+1} \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u(t) = u'(t) = -(n+1)\sin(t)(\cos(t))^n \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[\sin(t)(\cos(t))^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\sin(t))^2(\cos(t))^n\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(t))(\cos(t))^n\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^n\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{n+2}\mathrm{d}t\right) \\ &= (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$

b) En multipliant l'égalité précédente par W_{n+1}, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

La suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.}$

4. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après 2a), (W_n) est décroissante, alors $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2}$.
D'après 3a) $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geq W_{n+1} \geq \dfrac{n+2}{n+1} W_n.}$
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2b) $W_n > 0$. Divisant par W_n les membres de l'inégalité précédente, il vient :

$$1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+2}{n+1}$$

Or $\dfrac{n+2}{n+1} \sim \dfrac{n}{n} \sim 1 \to 1$. Par <u>encadrement</u> $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$.
Ainsi, $\boxed{W_{n+1} \sim W_n}$.
L'égalité du 3b) devient :

$$(n+1) W_{n+1} W_n \sim n W_n^2 \sim W_0 W_1 \sim \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$

Or l'équivalence est compatible par composition avec la fonction racine carrée.
Ainsi, $\boxed{W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.
5. D'après l'égalité établie en 3a) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \text{ ou encore } W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2(n-1)}$$

Il vient :
$$\begin{aligned} W_{2n} &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \times W_0 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 5 \times \times 3 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2n \times 2(n-1) \times \cdots \times 4 \times 2)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}.}$
<u>Autre approche :</u> Faire une récurrence.
En particulier, d'après 4b), $\dfrac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \dfrac{\pi}{2} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.
Ainsi, la **formule de Wallis** est $\boxed{\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}}$

Partie B - Formule de Stirling

6. a) Effectuons un développement asymptotique $\left(\text{en } \frac{1}{n}\right)$ de a_n afin d'en déterminer un équivalent :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &= -\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -1-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
a_n &= -1-\left(-1-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\sim \frac{1}{12n^2}
\end{aligned}$$

b) Comme $12n^2a_n \sim 1$, alors il existe $N \geq 2$ tel que pour $n \geq N$, $0 \leq 12n^2a_n \leq 2$ c'est-à-dire $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{6n^2}$.

c) Il vient, pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n}\frac{1}{6k^2} &\leq \sum_{k=N}^{n}\frac{1}{6k(k-1)}\\
&\leq \frac{1}{6}\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{n}\right) \text{ (somme téléscopique)}\\
&\leq \frac{1}{6(N-1)}\\
\sum_{k=2}^{n} a_k &\leq \sum_{k=2}^{N-1} a_k+\frac{1}{6(N-1)} \text{ majorant ne dépendant pas de } n
\end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\right)$ est majorée.

Comme, à partir d'un certain rang, $a_n \geq 0$, alors la suite est croissante.

d) Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone , $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\right) \text{ converge.}}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\ln(A_n)-\ln(A_{n-1}) &= \ln\left(\frac{1}{n!}n^ne^{-n}\sqrt{n}\right)-\ln\left(\frac{1}{(n-1)!}(n-1)^{n-1}e^{-(n-1)}\sqrt{n-1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(n-1)!}{n!}\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\frac{e^{-n}}{e^{-(n-1)}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}e^{-1}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\\
&= \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}e^{-1}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\\
&= \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}e^{-1}\right)\\
&= -1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)=a_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2, \quad a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1}).}$

8. La somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$ est donc de type téléscopique :

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \ln(A_k) - \ln(A_{k-1}) = \ln(A_n) - \ln(A_1)$$

La nature de la suite $(\ln(A_n))$ est identique à celle de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\right)$: elles sont croissantes (a.p.c.r.) et convergentes, notons α sa limite.
Par composition avec exp, continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n\geq 2} \text{ converge ; sa limite est } \ell = \exp(\alpha) > 0.}$

9. a) Comme $\ell \neq 0$ et que $A_n \to \ell$ alors $A_n \sim \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim \ell$. Ainsi, $\boxed{n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.

b) D'après la formule de Wallis :

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \sim \binom{2n}{n} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{\left(\frac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n}\right)^2} \sim \frac{\ell\ 2^{2n}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

Il vient $\ell \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Ainsi, $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$