DM 20

à rendre le mardi 29 avril 2025

Comparaison logarithmique

Les suites (u_n), (v_n) sont à termes strictement positifs.

1. **Critère de comparaison logarithmique**

a) Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang, alors $u_n = O(v_n)$.

b) En déduire une relation de comparaison pour la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

2. **Critère de d'Alembert**

On suppose que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Mettant en oeuvre une comparaison logarithmique à une suite géométrique, montrer que

(i) si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge ;

(ii) si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

b) Donner des exemples de séries vérifiant l'une ou l'autre des deux situations.

c) Exhiber au moins deux exemples justifiant que lorsque que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, la naturel est indéterminée.

3. **Critère de Raabe-Duhamel**

On suppose que $\lim n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \beta \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Mettons en place une comparaison logarithmique avec une **série de Riemann** en posant

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que si $\alpha \neq \beta$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \sim \dfrac{\alpha - \beta}{n}$

b) En déduire que

(i) si $\beta > 1$, alors $\sum u_n$ converge ;

(ii) si $\beta < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

c) Donner des exemples de séries vérifiant l'un ou l'autre des deux situations.

d) Considérons une série du type $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^\gamma}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^*$ appelée **série de Bertrand**.

Par comparaison série-intégrale, montrer que la série converge si et seulement si $\gamma > 1$.

e) Monter que les séries de Bertrand relèvent de la situation "$\beta = 1$" de Raabe-Duhamel.

f) En déduire au moins deux exemples justifiant que lorsque que $\beta = 1$, la nature est indéterminée.

4. **Critère de Gauss**

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

a) Par comparaison logarithmique à une suite de type $\left(\dfrac{1}{n+\alpha}\right)$, en déduire que $\sum u_n$ diverge.

b) Que dire des séries de Bertrand et du critère de Gauss.