Structures algébriques – Exercices

Loi de composition interne

Exercice 11.1 $(G, +)$ est un groupe ayant quatre éléments a, b, c et d. On donne quelques informations sur la table de la loi "$+$" :

+ ↱	a	b	c	d
a	d	c		
b	c			
c			c	
d	b			

Quel est l'élément neutre du groupe ? Compléter la table (en justifiant la façon de faire).

Exercice 11.2 Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total, $\leq$.
1. Montrer que $(E, \max)$ est un magma associatif et commutatif.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante $(E, \max)$ possède un élément neutre.

3. Le cas échéant, quels sont les éléments inversibles ?

Structure de groupe

Exercice 11.3
Montrer que $(\{x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}, \circ)$ est un groupe.

Exercice 11.4 Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
1. Calculer $B = A^2$, $C = A^3$, $A + C$ et $U = A^4$.

2. Montrer que $(\{U, A, B, C\}, \times)$, où $\times$ est le produit matriciel, forme un groupe commutatif.

Exercice 11.5 Soit E, un ensemble ayant au moins trois éléments.
Montrer que $\mathcal{S}_E$ est non commutatif.

Exercice 11.6 Soit $(G, \times)$ un groupe. On note e l'élément neutre et on suppose que:

$$\forall x \in G, \quad x^2 = e$$

Montrer que G est commutatif.

Structure de sous-groupe

Exercice 11.7 On appelle groupe monogène, tout groupe qui peut être engendré par un seul élément.

1. Montrer que tout sous-groupe G de $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

2. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ et identifier $c \in \mathbb{N}$ tel que

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$$

Exercice 11.8 Soit $(G, \times)$ un groupe et $H \subset G$ une partie finie non vide et stable par produit.
Montrer H est un sous-groupe de G.

Exercice 11.9 *Théorème de Lagrange*
Soit $(G, \times)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G.
On définit une relation sur G par, pour tout $(x, y) \in G^2$:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists h \in H \text{ tel que } x = h \times y)$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que les classes d'équivalences sont toutes en bijection.

3. En déduire le théorème de Lagrange : *L'ordre de tout sous groupe H d'un groupe G divise l'ordre du groupe.*

Vocabulaire : l'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments du groupe.

Structure d'anneau

Exercice 11.10
Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
Déterminer $U(\mathbb{Z}[i])$.

Exercice 11.11
1. Prouver que $5^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{Q}$

2. Prouver que

$$\mathbb{A} = \left\{x + 5^{\frac{1}{3}} y \middle| (x, y) \in \mathbb{Q}\right\}$$

n'est pas un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$ en constatant que $5^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{A}$ et $5^{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{A}$.

Exercice 11.12 L'anneau $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est-il intègre ? Déterminer $U(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$.

Exercice 11.13 Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in \mathbb{A}$ est un élément nilpotent s'il existe un entier n tel que $x^n = 0$.
1. Quels sont les éléments nilpotents si $\mathbb{A}$ est intègre ?

2. Soit $x, y \in \mathbb{A}$ deux éléments nilpotents qui commutent. Montrer que $x + y$ et $x \times y$ sont nilpotents.

3. Soit $x \in \mathbb{A}$ un élément nilpotent, montrer que $1 - x$ est inversible.

Exercice 11.14 Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B et on note $A\Delta B$ la partie :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

2. S'agit-il d'un corps ?

3. Si $F \subset E$ est-ce que $(\mathcal{P}(F), \Delta, \cap)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$?

Structure de corps

Exercice 11.15 Soit $\mathbb{B} = \left\{x + y\sqrt{5} \middle| (x, y) \in \mathbb{Q}\right\}$
1. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$x + y\sqrt{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5y^2 = 0$$

2. Montrer que $\mathbb{B}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

3. Est que $\mathbb{B}$ est un corps ?

Exercice 11.16 Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif, intègre et fini.
Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps.

Exercice 11.17 Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{Q}$.

Morphisme

Exercice 11.18 Soit G un groupe tel que $\varphi : x \mapsto x^2$ soit un morphisme. Montrer que G est commutatif.

Exercice 11.19
Soit G un groupe tel que $\varphi : x \mapsto x^3$ soit un morphisme surjectif.
1. Soit $a, b \in G$, simplifier $f\big(axa^{-1}\big)$.

2. En déduire que pour tout $x \in G$, x^2 commutent avec tout les éléments de G.

3. Montrer que G est commutatif.

Exercice 11.20 Soient $(G, .)$ un groupe et f une bijection de G dans G. Considérons l'*application* :

$$* : (x, y) \longmapsto x * y = f^{-1}(f(x).f(y))$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 11.21 Déterminer tous les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}$.
