

Polynômes et fractions rationnelles

Exercices

ANNEAU DES POLYNÔMES

Exercice 12.1 Déterminer les fonctions polynomiales réelles non nulles qui sont solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$x^2(1+x)y'' + x(1-x)y' - y = 0$$

Exercice 12.2 *Équations fonctionnelles*

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$: (1) $p \circ p = p$ (2) $p'^2 = 4p$

DIVISIBILITÉ

Exercice 12.3 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B lorsque :

- $A = 2X^3 - 4X^2 + 3X - 1$ et $B = X + 1$.
- $A = X^4 - iX^3 + (1+i)X^2 - X + 2$ et $B = X^2 - i$.
- $A = X^2 + 3X - 1$ et $B = X^3 + 1$.

Exercice 12.4

- Soit $\lambda = 1 + \sqrt[3]{2}$. Déterminer B , un polynôme à coefficient entier de degré 3, unitaire, dont λ est racine.
- Soit $A = X^4 - X^3 - 3X^2 + 3X - 4$. Effectuer la division euclidienne de A par B .
- Calculer $A(\lambda)$.

Exercice 12.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On désire calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Classique

- Calculer $A^2 - 5A + 4I_3$.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$.
- En déduire l'expression de A^n en fonction de A et de I_3 .

Exercice 12.6 Déterminer le reste R de la division euclidienne Classique

- de $(X-1)^n$ ($n \geq 2$) par $X^2 - X - 2$
- de X^n ($n \geq 2$) par $(X-a)^2$ ($a \in \mathbb{C}^*$)
- de $A_n = (X \sin a + \cos a)^n$ par $B = 1 + X^2$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12.7

Pour quels $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(1+X^4)^n - X^n$ est-il divisible par $1+X+X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

RACINES ET FACTORISATION

Exercice 12.8 Soit a, b et c trois réels non nuls et deux à deux distincts. On définit deux polynômes A et B par :

$$A(X) = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-a)(X-c)}{b(b-a)(b-c)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

$$B(X) = 1 + \frac{1}{abc} \left((X-a)(X-b)(X-c) \right)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 12.9 Soient P et Q deux polynômes réels non nuls de degrés respectif p et q et de coefficients dominants respectifs a et b .

- Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ est définie à partir d'un certain rang.
- Déterminer la limite éventuelle de cette suite en fonction de p, q, a et b .

Exercice 12.10 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

- Montrer que si $Q \in \mathbb{C}[X]$ divise P alors toute racine de Q est aussi une racine de P .

- Montrer par contraposition que si P' divise P alors P ne peut avoir deux racines distinctes.
- Identifier tous les polynômes tel que P' divise P .

Exercice 12.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les racines du polynôme

$$P_n = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$$

Exercice 12.12 Soit $P = (X+1)^n - X^n - 1$.

- Montrer que P possède une racine multiple si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} (x+1)^n - x^n - 1 = 0 \\ n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1} = 0 \end{cases}$$

- Déterminer les valeurs de n tel que P possède une racine multiple.

Exercice 12.13

Classique

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit T_n et U_n par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \\ \sin(\theta)U_n(\cos(\theta)) = \sin(n\theta) \end{cases}$$

- En admettant que T_n et U_n sont des polynômes, prouver que T_n et U_n sont uniques.
 - En développant $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$ par la formule du binôme de Newton, démontrer l'existence de T_n et U_n .
- Remarque :** T_n est appelé n -ième polynôme de Tchébychev de première espèce et U_n est appelé n -ième polynôme de Tchébychev de deuxième espèce.
- Donner T_0 et T_1 .
Écrire $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et en déduire T_2 et T_3 .
 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$. En déduire que, pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

Donner T_4 et T_5 .

- Montrer que T_n est de degré n et donner son coefficient dominant.
- Déterminer la parité de T_n en établissant par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $2XU_n - U_{n-1}$ et U_{n+1} . Que vaut $(1 - X^2)U_n^2 + T_n^2$?
- Trouver les racines de T_n pour $1 \leq n \leq 3$,
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation de définition, calculer les racines de T_n qui appartiennent à $[-1, 1]$. Montrer que l'on obtient ainsi toutes les racines de T_n dans \mathbb{C} . En déduire la décomposition de T_n en produit de facteurs irréductibles

- En déduire le calcul de $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)$

Exercice 12.14 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et, éventuellement, dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P_1 &= X^8 + X^4 + 1 \\ P_2 &= X^6 - i \\ P_3 &= X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1 \\ P_4 &= (X+1)^7 - X^7 \end{aligned}$$

Exercice 12.15 Déterminer λ et μ complexes pour que

$$P = X^4 + 4X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$$

admette -1 comme racine double. Factoriser P .

Relations coefficients-racines

Exercice 12.16 Racines rationnelles d'une polynôme à coefficients entiers

- Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n .

Donner une condition nécessaire sur a_0, a_n et $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pour que $\frac{p}{q}$ soit une racine de P .

2. Appliquer le critère obtenu pour trouver une racine *évidente* de $P = 2X^4 - 7X^3 + 5X^2 - 7X + 3$.

Exercice 12.17

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ telles que $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ et $x_2 + x_3$ sont non nuls. On note :

$$S = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}$$

Donner l'expression de S en fonction de a , b et c .

Exercice 12.18 Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système d'inconnues x, y, z suivant :

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{cases}$$

Polynôme de Lagrange

Exercice 12.19 *Méthode de Simpson*

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

1. Déterminer un polynôme P de degré 2 qui interpole f en a , b et $\frac{a+b}{2}$.

2. Montrer que $\int_a^b P(t)dt = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

Remarque : La méthode de Simpson utilise ce résultat pour approximer une intégrale de f .

Exercice 12.20 Les restes des divisions euclidiennes de P , élément de $\mathbb{R}[X]$, par $X - 1$, $X - 2$ et $X - 3$ sont respectivement 3, 7 et 13.

Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

ARITHMÉTIQUES

Exercice 12.21 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A + B$ et AB le sont.

Exercice 12.22 Déterminer le pgcd (et le ppcm) des polynômes P et Q dans les deux cas suivants:

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.

2. $P = X^3 + iX^2 + 4X + 4i$ et $Q = X^3 + 3X - 2i$.

Exercice 12.23 Donner une relation de Bezout associée à

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X \text{ et } Q = X^3 + 2X^2 + X + 2$$

Exercice 12.24 Identifier tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $X^2 - 2$ divise $P - X$ et $X + 3$ divise $P - 2$.

FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 12.25 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur \mathbb{R} :

$$F_1 = \frac{X^3}{(X^2 - 1)(X - 2)} \quad F_2 = \frac{(X^2 - X + 1)^2}{X^2(X - 1)^2}$$

$$F_3 = \frac{X^2}{(X^2 - 1)^2} \quad F_4 = \frac{X^6}{(X - 2)(X + 1)^2}$$

Exercice 12.26 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur \mathbb{C} puis en déduire leurs décompositions sur \mathbb{R} :

$$F_1 = \frac{X^4}{(X^2 + 1)(X - 1)} \quad F_2 = \frac{X^5}{X^4 - 1}$$

$$F_3 = \frac{X}{(X^2 + X + 1)(X + 1)^3} \quad F_4 = \frac{X^6}{(X^2 + 1)(X - 1)^3}$$

Exercice 12.27 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur \mathbb{R} :

$$F_1 = \frac{X^6}{(X^2 + 1)^2(X + 1)^2} \quad F_2 = \frac{X}{(X^4 + X^2 + 1)}$$

$$F_3 = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} \quad F_4 = \frac{X^5 - X^2 + 1}{(X^2 + 1)^2(X + 1)^2}$$

Exercice 12.28 On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, Déterminer la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} de la fraction :

$$F = \frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$$

puis en déduire celle de : $G = \frac{nX^{2n-2} + n(n-1)X^{n-2}}{(X^n - 1)^2}$

Exercice 12.29 Déterminer la DES dans $\mathbb{R}[X]$ de $\frac{1}{X^{2n} - 1}$.

Exercice 12.30 *Théorème de Lucas* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines a_1, a_2, \dots, a_k avec les multiplicités m_1, m_2, \dots, m_k .

1. Considérant $(f_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ des fonctions dérivables. Montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^k f_i \right)' = \sum_{i=1}^k \left(f_i' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f_j \right)$$

2. Décomposer en éléments simples $\frac{P'}{P}$.

Prog

3. En déduire que pour tout racine a de P' il existe k réels $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \lambda_i \geq 0, \quad 1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{ et } a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$$

On dit que a est barycentres à coefficients positifs de a_1, a_2, \dots, a_k .

4. Interpréter géométriquement le résultat précédent lorsque :

- $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant exactement deux racines qui sont réelles ;
- $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant toutes ses racines réelles ;

⇒ Exemples de développement en éléments simples sur \mathbb{R} :

$$\frac{X^4 + X}{(X - 1)^3} = X + 3 + \frac{6}{X - 1} + \frac{5}{(X - 1)^2} + \frac{2}{(X - 1)^3}$$

$$\frac{X^2 + 1}{(X - 1)^2 X^3} = \frac{4}{X} + \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X^3} - \frac{4}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2}$$

$$\frac{X - 1}{(X^2 + 2)^2 X} = -\frac{1}{4X} + \frac{X}{4(X^2 + 2)} + \frac{2 + X}{2(X^2 + 2)^2}$$

Exemples de développement en éléments simples sur \mathbb{C} :

$$\frac{X}{(X + 1)(X + i)^2} = -\frac{i}{2(1 + X)} + \frac{i}{2(X + i)} + \frac{1 - i}{2(X + i)^2}$$

$$\frac{i + (1 + i)X}{(X^2 + 1)^2} = -\frac{1}{4(X + i)} - \frac{1}{4(X + i)^2} + \frac{1}{4(X - i)} + \frac{1 - 2i}{4(X - i)^2}$$

Exemples de développement en éléments simples sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} :

$$\frac{2X^5}{(X^2 + 1)^2} = 2X - \frac{2}{X + i} + \frac{i}{2(X + i)^2} - \frac{2}{X - i} - \frac{i}{2(X - i)^2}$$

$$= 2X - \frac{4X}{X^2 + 1} + \frac{2X}{(X^2 + 1)^2}$$

$$\frac{X + 1}{(X^2 - 2X + 2)(X - 1)^2} = \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2} - \frac{1 + 2i}{2(X - 1 + i)} - \frac{1 - 2i}{2(X - 1 - i)}$$

$$= \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2} - \frac{1 + X}{X^2 - 2 * X + 2}$$