Espaces vectoriels – Exercices

Sous-espaces vectoriels

Exercice 14.1 Dire si les sous-ensembles sont des sous-e.v. ?

1. les polynômes de degré 2
2. $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\quad x+2y=0,\ z+3t=0\}$
3. les fonctions f telles que $f(1)=2f(0)$
4. $\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}};\ f(1)-f(0)=1\}$
5. $\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}};\ \forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+xf'(x)-2f(x)=0\}$

Exercice 14.2 Méthode

➜ Une méthode pour détermination de $F\cap G$:
- Mettre un espace sous la forme Vect(...)
- Mettre l'autre sous la forme d'un ensemble de vecteurs de E vérifiant une propriété.
- Déterminer $F\cap G$ en cherchant à quelle condition un vecteur quelconque du premier vérifie la propriété du second.

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y-z=0\}\quad G=\{(a-b,a+b,a-3b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer $F\cap G$.

Exercice 14.3 Il y a deux façons de définir un sous-ensemble :
- forme 1 : les éléments sont définis explicitement à l'aide de paramètres,
- forme 2 : les éléments sont définis par une propriétés, souvent des équations vérifiées par leurs coordonnées.

1. Soit $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & -2z & +t & =0\\ x & +3y & -z & -t & =0\end{array}\right.\right\}$. Mettre F sous la forme 1.
2. Soit $H=\mathrm{Vect}\big((1,-1,0,3),(2,1,1,-2)\big)$. Mettre H sous la forme 2.

Familles de vecteurs

Exercice 14.4 *Indépendance linéaire*
Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans l'espace indiqué:
1. Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_1=((1;2),(3;4),(0;0))$, $\mathcal{F}_2=((1;2),(-3;-6))$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}_3=((1;-3;5),(1;0;2),(1;-6;8))$.

Exercice 14.5
Montrer que $\{(1,2,-1,2),\ (2,3,0,-1),\ (1,3,-1,0),(1,2,1,4)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner les coordonnées du vecteur $(5,7,1,4)$ dans cette base.

Exercice 14.6
Soit (u,v,w) une famille libre dans E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
La famille $(u+v,v+w,u+w)$ est-elle libre ?

Exercice 14.7 On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=2\sqrt{2}u_{n+1}+4u_n$.
1. Identifier le type de la suite et en donner une expression explicite.
2. En déduire qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\mathcal{S}=\mathrm{Vect}(a,b)$.
3. La famille $\{a,b\}$ est-elle libre ? En déduire une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 14.8 Méthode
Soit r un réel non nul. Montrer que les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 14.9 Méthode

➜ Raisonnement par l'absurde pour montrer la liberté d'une famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$:
- Introduire une combinaison linéaire formelle nulle des vecteurs : soit $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k=0_E$
- Poser $k_0=\max\{k\in[\![1,n]\!];\ \alpha_k\neq 0\}$
- Montrer que $\alpha_{k_0}=0$ et conclure.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $r_1,r_2,\ldots,r_n$ des réels tels que $0<r_1<r_2<\cdots<r_n$, et $f_1,f_2,\ldots,f_n$ les fonctions définies par $f_i:x\mapsto\exp(r_ix)$.
Montrer que $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 14.10 Les deux questions sont indépendantes.
1. Montrer que $(1, 1+X, 1+X+X^2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$ et donner les coordonnées de $P = e + fX + gX^2$ dans cette base.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$. Montrer que les polynômes $P_k = (X-a)^k(X-b)^{2-k}$, $0 \leq k \leq 2$, forment une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 14.11
Pour quelles valeurs du réel m la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
$u_1 = (1,1,0,0)$ $u_2 = (1,m,1,0)$ $u_3 = (1,0,m,1)$ $u_4 = (1,0,0,m)$

Exercice 14.12 Classique
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,:\, AM = MA\}$.
1. Montrer que $C(A)$ est un sous-e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Déterminer une base de $C(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.13
Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m,1,m)$ appartient à $Vect(v,w)$, avec $v = (1,1,1)$ et $w = (1,m,-1)$.

Exercice 14.14 Extraire une base de la famille suivante :
$a = (1,-1,1)$, $b = (2,1,1)$, $c = (1,2,1)$, $d = (0,-3,1)$.
Donner les coordonnées des quatre vecteurs dans cette base.

Exercice 14.15
Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que la somme des coefficients de la première colonne soit égale à la somme des coefficients de la seconde colonne. Montrer que E est e.v. et en donner une base.

Exercice 14.16 Méthode

> ➜ Comparer deux espaces vectoriels F et G revient à déterminer si $F \subset G$, $G \subset F$, $F = G$ ou rien de cela. Un moyen est de considérer $F \cap G$ (ou la réunion).

Comparer $F = \mathrm{Vect}((1,2,1),(1,3,2))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,0),(3,8,5))$.

Exercice 14.17 Dans chacun des cas suivants, donner une base de E_1, E_2, $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$.

1. $E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; \left\{ \begin{array}{r} x - y + z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \end{array} \right. \right\}$

et $E_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; \left\{ \begin{array}{r} 2x + 3z + t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right. \right\}$

2. $E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; \left\{ \begin{array}{r} x - y + z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \end{array} \right. \right\}$

et $E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,1,-1);(1,0,1,0))$

3. $E_1 = \mathrm{Vect}((2,1,1,0);(1,-1,0,1))$ et $E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,1,-1);(1,0,1,0))$

Somme de sous-espaces

Exercice 14.18 Soient E l'ensemble des suites convergentes, F l'ensemble des suites convergeant vers 0 et G l'ensemble des suites constantes .
1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 14.19 Soient E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, f'(0) = f(0) = 0 \right\}$ et $G = \left\{ x \mapsto ax + b \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 14.20 Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 14.21 Montrer que F et G sont supplémentaires de $\mathbb{K}^3$.
$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, x + 2y - 3z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,2,-3))$.
