

# Séries – Exercices

## GÉNÉRALITÉS

### Exercice 19.1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et converge vers 0.
2. Prouver la convergence de la série de terme général  $u_n^2$  et calculer sa somme.
3. À l'aide des sommes partielles, montrer que la série de terme général  $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  est divergente.
4. En déduire la nature de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 19.2 Séries télescopiques

Étudier la convergence et donner les sommes éventuelles des séries suivantes :

$$\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right), \quad n \geq 1, \quad \sum \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$$

## COMPARAISON DE SÉRIES

**Exercice 19.3** Montrer que  $\frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}} \sim \frac{1}{n}$  et  $(\ln(n))^{-\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Conclure sur la nature des séries  $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$  et  $\sum (\ln(n))^{-\ln(n)}$ .

**Exercice 19.4** Nature de la série de terme général :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad b_n = \frac{n \ln(n)}{5^n}, \quad c_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+3}\right),$$

$$d_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \epsilon_n = \frac{\cos(2n)}{3n^2 - 4n + 1}, \quad f_n = \left(\frac{1}{\ln(2n)}\right)^n,$$

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}, \quad h_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n}, \quad j_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e.$$

### Exercice 19.5

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2. On admet  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Montrer que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ .

**Exercice 19.6** Discuter en fonction des réels positifs  $a$  et  $b$  la nature de la série de terme général  $\frac{a^n}{1+b^n}$ .

### Exercice 19.7 Développement asymptotique

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$ .

1. Montre que la suite  $(u_n)$  converge. On note  $\ell$  sa limite.
2. Étudier la nature de la série  $\sum (u_n - \ell)$ .

**Exercice 19.8** Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}$$

En déduire la nature de la série de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

**Exercice 19.9** Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  strictement positifs tels que  $\sum u_n$  converge, où :

$$u_n = a^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}(b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}})$$

**Exercice 19.10** Critère de d'Alembert

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes strictement positifs.

1. Démontrer que :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

2. Quelle est la nature de  $\sum u_n$  si  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

3. Application : Nature des séries  $\sum \frac{n^{12}}{n!}$ ,  $\sum \frac{n^n}{n!}$  et  $\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ .

**SÉRIES PARTICULIÈRES**

**Exercice 19.11** Série dérivée d'une série géométrique

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\sum nx^{n-1}$ , pour  $n \geq 1$  et  $\sum n(n-1)x^{n-2}$ , pour  $n \geq 2$  converge si et seulement si  $|x| < 1$ .

Le cas échéant, vérifier que

$$\sum_{k=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{k=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

2. En déduire la nature et la somme éventuelle des séries :

$$\sum \frac{n-1}{3^{n+1}}, \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } \sum \frac{4n^2 + 5n}{5^n}, \text{ pour } n \geq 1$$

**Exercice 19.12**

Méthode

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $\int_0^1 t^k dt$ .

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , réécrire  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$  sous la forme d'une intégrale.

3. Conjecturer la limite de  $S_n$  et l'établir.

4. Conclure que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge et donner sa somme.

**Exercice 19.13** Donner la nature et la somme éventuelle des séries suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n}{3(n+1)!}, \text{ pour } n \geq 0 \quad \sum \frac{n^2 + 1}{2^{n-1}n!}, \text{ pour } n \geq 2$$

**Exercice 19.14**

1. Justifier l'existence de  $\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Trouver une suite  $(u_n)$  positive telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u_k$$

3. En déduire que la suite  $\left( \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt \right)$  converge.

**Exercice 19.15** Calcul de  $\zeta(2)$

Classique

1. Montrer que

$$\int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

2. Montrer que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in ]0, \pi]$ ,

$$\sum_{n=1}^N \cos(nt) = \frac{1}{2} \sin(Nt) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} + \frac{1}{2} \cos(Nt) - \frac{1}{2}$$

3. Soit  $f$  un application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

4. En déduire<sup>1</sup>  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

<sup>1</sup>Cette formule est due à Euler (1736 et 1748)

**Exercice 19.16**

Nature et somme de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$ .

**Exercice 19.17**

Discuter, sur  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  et  $n \geq 2$ , la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$$

**Exercice 19.18**

Nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Exercice 19.19** Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{2n} = \frac{2^{n-1}}{3^n} \\ u_{2n+1} = \frac{2^n}{3^{n+1}} \end{cases}$$

Nature de  $\sum u_n$  et calcul de la somme si la série converge.

**Exercice 19.20** Pour tout  $x > 0$ , on pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ .

1. Justifier l'existence de  $S(x)$  pour tout  $x > 0$ .

2. Soit  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$  et  $(x, x_0) \in [a, b]^2$ .

Montrer qu'il existe  $C > 0$ , indépendant de  $x$  et  $x_0$ , tel que

$$|S(x) - S(x_0)| \leq C|x - x_0|$$

En déduire que  $S$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

3. Montrer  $\forall x > 0$ ,  $S(x) - S(x+1) = \frac{1}{x^2}$ .

En déduire un équivalent en 0 de  $S$ .

4. Avec une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

**FAMILLES SOMMABLES**

**Exercice 19.21** Sommabilité et somme de la famille

$$\left( \frac{1}{(j+k^2)(j+k^2+1)} \right)_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$$

**Exercice 19.22** Montrer que la famille  $\left( \frac{1}{jk(j+k)} \right)_{(j,k) \in \mathbb{N}^{*2}}$  est sommable.

**Exercice 19.23**

Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la famille suivante est sommable ?

$$\left( \frac{pq}{(p+q)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$$

**Exercice 19.24** Déterminer la somme de la famille suivante :

$$\left( \frac{j^k e^{-2j}}{k!} \right)_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$$

**Exercice 19.25** Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

1. Montrer que la famille  $(x^{jk})_{(j,k) \in \mathbb{N}^{*2}}$  est sommable.

2. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où  $d(n)$  est le nombre diviseurs entiers naturels de  $n$ .

**Exercice 19.26**

Soient  $a \in ]-1, 1[$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = a^n \sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!}$ .

1. Montrer que la famille  $(u_n)$  est sommable.

2. Déterminer la somme de la famille.