Variables aléatoires discrètes finies Exercices

Généralités

Exercice 20.1
Soit X une vad finie dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x	-4	-2	1	2	3
$P_X(x)$	$0,10$	$0,35$	$0,15$	$0,25$	$0,15$

1/ Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2/ Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.
3/ Calculer $\mathbf{P}(X < 0)$, $\mathbf{P}(X > -1)$, $\mathbf{P}(-3,5 < X \leq 2)$
et $\mathbf{P}(-3,5 < X < 2)$.
4/ Déterminer les lois de $X^2 + X$ et de $|X|$.

Exercice 20.2 Classique
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 20.3
On considère une urne contenant initialement exactement une boule blanche et une boule rouge, indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans l'urne. Avant le tirage suivant, on rajoute dans l'urne un autre boule de la même couleur que celle tirée.
Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Déterminer par récurrence la loi de X_n.

Exercice 20.4
On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté.

Exemple : $$(\overbrace{Pile, Pile}^{\textit{première série de longueur 2}}, \underbrace{Face, Face, Face, Face}_{\textit{deuxième série de longueur 4}}, Pile, \cdots$$

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i-ième lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire. On note L_1 (resp. L_2) la longueur de la première (resp. seconde) série.
1. Décrire l'évènement $(L_1 = 2)$ en fonction des P_i et F_i. Décrire $(L_1 \geq 2)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(L_1 = 2)$.
3. Décrire l'évènement $(L_1 = 3 \cap L_2 = 3)$ puis calculer sa probabilité.
4. Généraliser en déterminant $\mathbf{P}(L_1 = k)$ et $\mathbf{P}(L_1 = k \cap L_2 = j)$ pour $k, j \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 20.5
On considère une successions de lancers d'une pièce équilibrée.
On note N_n le nombre de séries lors des n premiers lancers :
- La première série est de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;
- La dernière série se termine nécessairement au n-ième lancer.

Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP
(F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2;$$

$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4;$$

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $\mathbf{P}(N_n = 1)$ et $\mathbf{P}(N_n = n)$.

Exercice 20.6
Une entreprise recrute un cadre. n candidats se présentent et chacun d'eux passe un test. Le premier qui y satisfait est engagé. La probabilité qu'un candidat réussisse le test est $p \in]0,1[$. On définit la vad finie X par :
- $X = j$ si le j^{ieme} candidat est engagé $(1 \leq j \leq n)$,
- $X = 0$ si aucun des candidats n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Tracer la fonction de répartition de X lorsque $p = \frac{1}{2}$ et $n = 4$.
3. Comment doit-on choisir n pour avoir strictement plus d'une chance sur deux de recruter un nouveau cadre ?

4. Déterminer la probabilité que le j^{ieme} candidat soit recruté sachant qu'il y a un candidat recruté.

5. Chaque test coûte 100 € à l'entreprise. Quel est le coût moyen de l'opération ?
Indication : Une somme du type $\sum jx^{j-1}$ peut se calculer en dérivant $x \mapsto \sum x^j$.

Exercice 20.7 Soit X une vad finie telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
1. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \geq k) - \mathbf{P}(X \geq k+1).$$
2. Montrer que :
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geq k)$$

Exercice 20.8 X est une variable aléatoire de loi binomiale $\hookrightarrow B(n, p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :
- le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$
- lorsque $X = 0$ ou n, le compteur affiche un nombre au hasard compris entre 1 et $n-1$

Soit Y la valeur affichée par le compteur.
1. Déterminer la loi de Y. Quelle est, en moyenne, la valeur affichée par le compteur ?

2. Quelle est la probabilité pour que le compteur affiche la valeur prise par X ?

3. On suppose $n = 2k$. Le compteur affiche la valeur k. Quelle est la probabilité pour que $X = k$?

Exercice 20.9 *Fonction génératrice* ✔ Classique
Soit X une vad finie telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
On pose, pour $s \in \mathbb{R}$, $G_X(s) = \mathbf{E}(s^X)$.
1. Exprimer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

2. Calculer G_X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Retrouver ainsi $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

3. Calculer G_X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$. Ne pas calculer les moments.

Lois usuelles

Exercice 20.10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 3 boules : une blanche, une rouge et une verte. On effectue n tirages successifs avec remise. Si $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a changement de couleur au i^{eme} tirage si la i^{eme} boule tirée est d'une couleur différente de la $(i-1)^{eme}$ boule. On note X la vad finie égale au nombre de changements de couleur intervenants au cours des n tirages.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 20.11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules dont 1 rouge et $n-1$ blanches. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir la boule rouge. Soit T la vad finie égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer les valeurs prises par T, sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 20.12
On pose n questions à un candidat. Pour chaque question, il a une probabilité $p \in]0,1[$ de répondre correctement. Soit X le nombre de bonnes réponses fournies.
1. Quelle est la loi de X ?

2. À chaque mauvaise réponse, on donne une seconde chance au candidat. Il a alors une probabilité $q \in]0,1[$ de fournir la bonne réponse. Soit Y le nombre de bonnes réponses fournies lors de ces secondes tentatives.

   a) Déterminer le loi de Y sachant que $(X = k)$.

   b) Donner la loi de Y.

Exercice 20.13 Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées 0, 1, $\ldots n$ $\ldots$ de gauche à droite.
Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ, la puce se trouve sur la case 0.
On note X_n et Y_n les variables aléatoires représentant respectivement le numéro de la case où se trouve la puce après n sauts et le nombre de sauts d'une case effectués au cours des n premiers sauts.
1. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

2. Exprimer X_n en fonction de Y_n, et calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$ en fonction de n.

Autres lois

Exercice 20.14 *Loi hypergéométrique - tirage sans remise*
On effectue n tirages sans remise dans une urne contenant N boules dont a vertes et b bleues. Soit X le nombre de boules vertes obtenues
1. Justifier que $X(\Omega) = [\![\max(0, n-b), \min(n, a)]\!]$

2. Soit p la proportion de boules vertes. Réécrire $X(\Omega)$ en fonction de N, n et p.

3. Donner la loi de X. On notera $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

4. Justifier que l'on peut se ramener à $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

5. Montrer que $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$.

6. Soient $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Soit $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers supérieurs à n tels que $\lim\limits_{j\to+\infty} N_j = +\infty$ et pour tout j, $pN_j \in \mathbb{N}$. Enfin, soit $X_j \hookrightarrow \mathcal{H}(N_j,n,p)$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad \mathbf{P}(X_j = k) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Y = k)$$

7. Dans une urne de 49 boules numérotée de 1 à 49, on effectue un tirage de k boules. On note P_k le nombre de numéros pairs obtenus. Donner la loi de P_k et son espérance.
Pour $k = 3$, donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir deux numéros pairs.

Remarque – On approxime $\mathcal{H}(N,n,p)$ par $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque $N \geq 10n$.

Exercice 20.15 *Loi du maximum* ✔

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue k tirages **sans** remise. Soit X la vad finie égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.
2. Même question si les tirages s'effectuent **avec** remise.

Indication : Travailler par dénombrement de l'évènement $(X = j)$ avec $j \in [\![k;n]\!]$.

Formule de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 20.16 *Intervalle de confiance*
On dispose d'un dé pipé dont la probabilité d'obtenir 6 est p. On lance n fois le dé et déterminons F_n la fréquence d'apparition du 6. Donner une valeur de n telle que la probabilité de F_n soit une approximation de p à la précision 0,01 soit supérieure à 0,95.
Vocabulaire : On cherche n tel $]F_n - 0,01; F_n + 0,01[$ soit un intervalle de confiance pour le paramètre p de risque 5% (ou de niveau de confiance 95%).

Exercice 20.17 *Estimation par intervalle de confiance de l'espérance*
Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite vad finies, indépendantes de même loi, d'espérance m, de variance σ^2 et $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.
L'intervalle de confiance $I =]\overline{X_n} - b, \overline{X_n} + b[$ est dit de niveau de confiance 95% ou de niveau de risque 5% si $\mathbf{P}(m \in I) \geq 0.95$. Cela donne une estimation du paramètre m de la loi à partir de simulations. Pour le même nombre de simulations, on peut réduire l'intervalle de confiance, mais cela diminue le niveau de confiance (ou augment le niveau de risque).

Montrer qu'un intervalle de confiance de niveau de risque $\alpha \in]0,1[$ est

$$\left]\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha n}}; \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha n}}\right[$$

Exercice 20.18 ✔ Un joueur parie à la roulette : il décide de jouer 1 euro sur une couleur (rouge ou noir) à chaque partie. Le plateau contient 37 cases : 18 rouges, 18 noires, et 1 verte. Si la couleur choisie sort, il gagne 1 euro et récupère sa mise, sinon, il perd sa mise. Soit X_n le gain du joueur après n parties:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si le joueur remporte la } (n+1)\text{-ième partie,} \\ X_n - 1 & \text{si le joueur perd la } (n+1)\text{-ième partie.} \end{cases}$$

1. Soit Y_n le nombre de parties gagnées.
Donner la loi de Y_n. en déduire la loi de X_n.
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une estimation (par excès) du plus petit entier n tel que :

$$P(X_n < 0) \geq 95\%$$

On exprimera n en fonction de $p = \dfrac{18}{37}$ et $q = 1 - p$.

Couple de vad

Exercice 20.19
Soit $n \geq 2$. On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et dans cette urne on choisit une boule au hasard. On note X_n le numéro de l'urne choisie et N_n le numéro de la boule obtenue.
1. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
   a) Déterminer la loi du couple (X_3, N_3).
   b) Déterminer la loi de N_3 ainsi que son espérance et sa variance.
   c) X_3 et N_3 sont-elles indépendantes ?
2. On revient au cas général $n \geq 2$.
   a) Montrer que $N_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et que
   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}$$
   b) Calculer l'espérance de N_n.

Exercice 20.20 *Loi de* $\min(X,Y)$
Soit (X,Y) un couple de loi donnée par le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$

Déterminons la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 20.21 Soit X et Y deux vad finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. Montrer que

$$|\mathbf{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Étudier le cas d'égalité.
Indication : Calculer $\mathbf{Cov}(X + \lambda Y, X + \lambda Y)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 20.22 Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0, 1[$. Soient $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (S, D).
2. Calculer $\mathbf{Cov}(S, D)$ et déterminer si S et D sont indépendantes.

Exercice 20.23 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $L = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (L, M).
2. Calculer $\mathbf{Cov}(L, M)$ et déterminer si L et M sont indépendantes.

Exercice 20.24 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(r)$ telles que $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 20.25 *Loi d'un maximum*
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules sans remise. On note X_1 (resp. X_2) le 1er (reps. 2ième) numéro tiré. Soit $Z = \max(X_1, X_2)$. Donner la loi de Z.

Exercice 20.26 *Binomiale conditionnée par une binomiale*
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et que la loi de Y sachant $(X = k)$ est $\mathcal{B}(k, q)$. Donc loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par : $(X, Y)(\Omega) = [\![0, n]\!]^2$ et pour $k, j \in [\![1, n]\!]$:

$$p_{(X,Y)}(k, j) = \begin{cases} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}.$$

1. Déterminer, par le calcul, la loi Y.
2. Déterminer l'espérance de XY, puis montrer que $\mathbf{Cov}(X, Y) = npq(1 - p)$.

Exercice 20.27 Soit X et Y deux variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([\![1; n]\!])$. Donner la loi conjointe du couple puis celle de $Z = X + Y$.

Exercice 20.28 *Stabilité de la loi binomiale*
Montrer par le calcul la stabilité de la loi binomiale : soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$; si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 20.29 Soient X une variable qui suit la loi hypergéométrique $\hookrightarrow H(N, n, p)$. X compte le nombre de succès dans une suite de n tirages sans remise, dans une urne contenant N boules, dont une proportion p est gagnante :

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

où

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a succès au } i\text{-ème tirage} \\ 0 & \text{s'il y a échec au } i\text{-ème tirage} \end{cases}$$

1. Justifier que X_1, X_2, $\ldots X_n$ sont des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi.
2. Identifier la loi de X_1, son espérance et sa variance.
3. Justifier que les couples (X_i, X_j), lorsque $i \neq j$, suivent tous la même loi.
4. Identifier la loi du couple (X_1, X_2), puis la covariance $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$.
5. En déduire la variance de la loi hypergéométrique :

$$\mathbf{V}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

n-uplet de vad

Exercice 20.30 Classique

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite finies de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi. On pose $L = \min(X_i; i \in [\![1, n]\!])$ et $M = \max(X_i; i \in [\![1, n]\!])$. Déterminer l'expression des fonction de répartition de L et M en fonction de F la fonction de répartition des X_i.

Exercice 20.31 Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ une suite finies de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$

1. Donner la loi de Y_i
2. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de S_n.