

Matrices et applications linéaires – Exercices

Calculs matriciels

Exercice 21.1

Calculer A^2 lorsque $A = (a_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$ et $a_{kl} = \exp\left(\frac{2ikl\pi}{n}\right)$.

Exercice 21.2 Dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse éventuelle :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 21.3

On considère les suites réelles u et v définies par u_0, v_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Montrez qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que l'on peut écrire $A = 5I_2 + J$ avec J une matrice à déterminer.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Déduisez les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

Trace et rang

Exercice 21.4 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(AM) = \text{tr}(BM) \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Exercice 21.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{tr}(AA^T) = 0$. Que dire de A ?

Exercice 21.6

Résolution de l'équation en X , où $X, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \neq 0$:

$$X + \text{tr}(X).A = B$$

On pose $h : X \mapsto \text{tr}(X)A$ et $f = id + h$

1. Trouver un polynôme annulateur de f .

2. A quelle condition f est bijective ?

3. Lorsque f n'est pas bijective, montrer que f est un projecteur dont vous déterminerez son noyau et son image.

4. Résoudre l'équation.

Exercice 21.7 Calculer le rang des matrices suivantes, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 21.8 Montrer que toute matrice rang 1 peut se décomposer sous la forme d'un produit d'une colonne par une ligne :

$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\text{rg}(M) = 1 \implies \exists C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}); M = CL$

Exercice 21.9

1. Soient $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\text{rg}(MN) \leq \min(\text{rg}(M), \text{rg}(N)).$$

Prog

2. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer $(AB)^2$ et déterminer son rang.
- En déduire à l'aide de 1. que BA est de rang 2 et qu'elle est inversible.
- Calculer BA .

Matrices et applications linéaires

Exercice 21.10 Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Quelle est l'image de $\vec{u} = (2, -1, 3)$ par l'application linéaire associée à M ?

Exercice 21.11

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système (\mathcal{S}) admet-il au moins une solution ?
- Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ est A . À l'aide de la question précédente, déterminer une base de $\text{Im } u$

Exercice 21.12

- Quelle est la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = P(x + 1)$.
- Établir que f est un automorphisme et donner la matrice de f^{-1} et plus généralement de f^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 21.13 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\varphi : M \mapsto AM$.

Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Exprimer φ^{-1} et donner le matrice de φ^{-1} dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21.14

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$

- Donner la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$:
- En considérant la matrice montrer que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(X, 1 + X^2)$ et déterminer $\text{Ker}(f)$.

Exercice 21.15 Soit E un \mathbb{R} -espace de dimension 3 de base canonique \mathcal{B} . Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice relative à la base \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. Ces espaces sont-ils supplémentaires ?
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f^2)$ et une base de $\text{Im}(f^2)$. Ces espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 21.16

Soit F un sous-espace vectoriel de E et A le sous-ensemble défini par

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E) ; F \subset \text{Ker}(f)\}$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Si E est de dimension finie, déterminer la dimension de A .

Exercice 21.17 *Matrice compagnon*

Soit $P = X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

On définit la matrice **compagnon** C associé à P par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de \mathbb{K}^5 . On note Id l'application identité de \mathbb{K}^5 et f l'endomorphisme canoniquement associé à C .

1. a) Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .
- b) En déduire, pour tout $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^5(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + a_2e_3 + a_3e_4 + a_4e_5)$.
2. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{C}^5 défini par $g = P(f)$.
 - a) Vérifier que $g(e_1) = 0$.
 - b) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
 - c) En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, $g(e_i) = 0$.
 - d) Montrer que P est un polynôme annulateur de f .
3. Déterminer une matrice A telle que $A^5 = A^3 + 2A + I_5$.

Exercice 21.18

1. Soit f la rotation du plan d'angle θ et de centre l'origine du repère.
 - a) Donner la matrice de f , noté A , dans la base canonique.
 - b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donner l'expression de A^k .
 - c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner une matrice B telle que $B^k = A$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donner l'expression de A^k .
- b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ impair, donner une matrice B telle que $B^k = A$.
- c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ pair, donner une matrice B telle que $B^k = A$.

Matrices équivalentes

Exercice 21.19

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}$ et P, P', Q, Q' des matrices carrées telles que

$$B = QAP \text{ et } A = Q'BP'$$

Montrer que A et B sont équivalentes.

Exercice 21.20 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rang de

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Indication : Établir qu'il existe $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\text{rg}(f_A) = \text{rg}(f_{J_r})$.

Matrices semblables

Exercice 21.21 L'objectif est de montrer que A et B sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 17 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice A dans la base canonique :

1. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
2. Trouver une base dans laquelle la matrice de u est B .

Exercice 21.22 *Matrice nilpotente*

1. On considère un endomorphisme g de \mathbb{R}^n tel que : $g^{n-1} \neq 0$ et $g^n = 0$. On a déjà vu (TD 17) qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathcal{B} = (g^{n-1}(a), g^{n-2}(a), \dots, a)$$

est une base de \mathbb{R}^n . Donner la matrice N de g dans la base \mathcal{B} .

2. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ -7 & 4 & 5 & -7 \\ -11 & 6 & 8 & -11 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer A^2, A^3, A^4 .
- b) En s'inspirant de la première question, montrer que A et B sont semblables et donner une matrice P telle que $B = P^{-1}AP$. Est-ce que P est unique ?

Exercice 21.23 Soit p la projection sur E parallèlement à F avec :

$$E = \text{Vect} \left(a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad F = \text{Vect} \left(c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

1. Vérifier E et F sont supplémentaires, c'est-à-dire que la famille $\{a, b, c\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette base.

2. Déterminer la matrice, A , de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

3. En déduire, la matrice de la symétrie par rapport à F parallèlement à E dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

4. Donner la matrice, B , de p dans la base $\{a, b, c\}$.

5. En introduisant une matrice ad-hoc, donner une relation liant A et B .

Exercice 21.24 Diagonalisation d'une matrice

Soit f l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E

2. Déterminer les valeurs de λ telles que $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

3. Pour chaque valeur trouvée, donner une base de $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.

4. Vérifier que la juxtaposition de base trouvée est une base de E .

5. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

6. Considérer chacune des questions suivantes dans la nouvelle base pour apporter une solution :

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner A^n .

b) On admet que $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base de $\mathcal{C}(A)$.

c) Résoudre $X^3 = A$. On pourra commencer par montrer que $X \in \mathcal{C}(A)$.

Remarque : On dit qu'une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Une CNS est mise en évidence à la question 4 : la juxtaposition des bases des $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ forme une base de E .

Exercice 21.25 Soit $n \geq 2$. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - nXP.$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = (X + 1)^k (X - 1)^{n-k}$.

Montrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Déterminer la matrice de φ dans la base \mathcal{C} .

Matrices par blocs

Considérant $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'écrivant par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}$$

On admet que si les produits AA' et DD' sont compatibles alors le produit MM'

l'est aussi et $MM' = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}$

Exercice 21.26 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} J_{\text{rg}(A)} & 0 \\ 0 & J_{\text{rg}(B)} \end{pmatrix}$.

2. En déduire le rang de C .

Exercice 21.27 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $C = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.

2. Donner un CNS d'inversibilité de C .

3. Donner l'expression de l'inverse de C lorsqu'elle existe.

Exercice 21.28 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de rang k . Calculer le rang de $B \in \mathcal{M}_{np,mp}(\mathbb{K})$ avec

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$