Déterminants – Exercices

Groupe symétrique

Exercice 22.1 *Transposition*

1. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles, puis en produits de transpositions et donner leur signature :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 7 & 6 & 9 & 2 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer σ^{-1} dans chacun des cas.

3. Déterminer σ^{2023} dans chacun des cas et donner une écriture simple en fonction σ.

Exercice 22.2 Soit s et t deux transpositions.
Montrer que $s \circ t = \mathrm{Id}$ ou $(s \circ t)^2 = \mathrm{Id}$ ou $(s \circ t)^3 = \mathrm{Id}$.

Exercice 22.3 Soit $n \geq 2$, $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in S_n$.
Montrer que σ et (i, j) commutent si et seulement si $\{i, j\}$ est stable par σ.

Exercice 22.4 Montrer par récurrence sur n que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ se décompose comme le produit de transpositions.

Exercice 22.5
1. Montrer que toutes les transpositions (a, b) peut se décomposer comme le produits de transpositions d'indices consécutifs $(i, i+1)$.

2. Montrer que les transpositions d'indices consécutifs engendrent S_n.

3. Soit $t = (1, 2)$ et $c = (1, 2, \ldots, n)$.

a) Calculer $c^{k-1} \circ t \circ c^{-k+1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Montrer que la transposition $(1, 2)$ et le cycle $(1, 2, \ldots, n)$ engendrent S_n.

Exercice 22.6 *Groupe alterné*
1. Soit $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n ; \epsilon(\sigma) = 1\}$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est un groupe pour la loi de composition (notée produit).
Le groupe $\mathcal{A}_n$ est appelé groupe alterné d'ordre n.

2. Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$.

Exercice 22.7 Soit $n \geq 2$ et t une transposition de S_n.
1. Montrer que l'application $\sigma \mapsto t \circ \sigma$ est une bijection de S_n.

2. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n ; \epsilon(\sigma) = 1\}$.

Déterminants

Exercice 22.8 Calculer les déterminants suivants :
1. Avec la règle de Sarrus :

$$d_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. En utilisant des opérations élémentaires :

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad d_5 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad d_6 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

3. En développant par rapport à une colonne ou une ligne :

$$d_7 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad d_8 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad d_9 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Exercice 22.9 Calculer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Indication : Considérer le déterminant comme une forme n-linéaire alternée de ses vecteurs colonnes en posant $A = (a_i)$ et $B_i = b_i e_i$.

Exercice 22.10 Calculer

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$$

Exercice 22.11 Calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}_{[n]} \qquad B_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Indication : Mettre en place une somme téléscopique pour exploiter la relation vérifiée par B_n.

Exercice 22.12 Calculer le déterminant de la matrice A de taille $n \times n$ et de terme général $a_{ij} = |i-j|$.

Exercice 22.13 *Dérivation d'un déterminant*
Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ dont les coefficients sont des fonctions réelle de x ; on note A_i sa i-ème colonne.

1. Établir la formulation de dérivation suivante :

$$\det{}'(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(A_1, \dots, A_i', \dots, A_n)$$

2. Calculer Δ_n' et en déduire Δ_n.

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}_{[n]}$$

Indication : formule de dérivée d'un produit $\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} \left(f_j'(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} f_i(x) \right)$

Exercice 22.14 *Matrices semblables*
Montrer que deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Polynôme caractéristique

Exercice 22.15 *Polynôme caractéristique*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour $x \in \mathbb{K}$, $\chi_M(x) = \det(xI_n - M)$.
1. Montrer que χ_M est une fonction polynomiale de degré inférieur à n.
On l'appelle **polynôme caractéristique** associé à M.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(xI_n - M) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ si et seulement si $\chi_M(x) = 0$.
On appelle valeur propre de M les racines de χ_M.
3. Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 22.16 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|M\|_\infty = \sup\{|m_{i,j}|; i,j \in [\![1,n]\!]\}$, appelée norme sup, et on dit que la suites de matrices (M_k) converge vers la matrice L si $\|M_k - L\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la limite d'une suite de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: on dit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 22.17 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad \chi_{AB}(x) = \det(xI_n - AB) = \det(xI_n - BA) = \chi_{BA}(x)$$

Exercice 22.18 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $n \geq 2$, l'anneau $(\mathcal{C}(A), +, \times)$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant avec A peut-il être un corps ?

Vandermonde

Exercice 22.19 Calculer ces variantes de Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} \qquad \Gamma = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 22.20 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\Big(\cos((j-1)x_i)\Big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Indication : introduire les polynômes de Tchebychev.

Comatrice

Exercice 22.21 Soient $n \geq 2$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\mathbb{K}$.
1. Exprimer $\mathrm{Com}(\lambda M)$ en fonction de $\mathrm{Com}(M)$.

2. Expression du rang de la comatrice en fonction de celui de la matrice. Montrer que

$$\mathrm{rg}\big(\mathrm{Com}(M)\big) = \begin{cases} n & \text{si } \mathrm{rg}(M) = n \\ 1 & \text{si } \mathrm{rg}(M) = n-1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{rg}(M) \leq n-2 \end{cases}$$

3. Montrer que $\det\big(\mathrm{Com}(M)\big) = \det(M)^{n-1}$.

4. Montrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(M)) = \det(M)^{n-2} M$

Exercice 22.22 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
1. Montre que $\det(M) \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que $|\det(M)| = 1$ si et seulement s'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $MN = I_n$.

Exercice 22.23 *Formule de Cramer*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, B_j la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par B.
Si $\det(A) \neq 0$, l'équation $AX = B$, d'inconnue X, est un système de Cramer.
1. Montrer que l'unique solution vérifie :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}$$

2. Appliquer cette formule pour résoudre :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Géométrie

Exercice 22.24 Soit $A(-3, 1)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 3)$ et $\overrightarrow{u}(1, 2)$.
1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D} = (AB)$.

2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}'_{C,\overrightarrow{u}}$.

3. Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

Exercice 22.25
1. Donner l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ engendré par $A(1, 2, 0)$, $\overrightarrow{u}(1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v}(0, 1, -1)$

2. Définir la droite $\mathcal{D}$, engendrée par $B(0, 2, 1)$ et $\overrightarrow{w}(-1, 1\ -\ 1)$ comme l'intersection de deux plans.

3. Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

Matrice par blocs

Exercice 22.26
1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs avec A et C des matrices carrées.
Montrer que $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

2. Déterminer $d_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et

$d_3 = \begin{vmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 22.27
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CA$ et A inversible.
1. Montrer que : $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB)$

2. Que se passe-t-il si A est non inversible ?
Indication :
1. Considérer $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$
2. Utiliser la continuité du déterminant et le fait que toute matrice est la limite d'une suite de matrices inversibles.

Exercice 22.28 *Matrice compagnon*
Soit $(A_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n$.
1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Généraliser le résultat pour la matrice par blocs N de $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ en exprimant son déterminant en fonction de celui de ses blocs.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_k \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{n-2} & -A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 22.29 *Déterminant d'une application linéaire*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto AM$.

1. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, identifier $AE_{i,j}$.
2. Donner la matrice de φ_A dans la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{2,1}, \ldots, E_{n,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,2}, \ldots E_{n,n}\}$$

3. En déduire le déterminant de φ_A.
