DS 1

Mercredi 13 septembre 2023 – durée 2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geq 0 \quad ; \quad \forall n \geq 1, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

1. Montrer que pour tout entier n, $\quad u_n \geq \sqrt{n}$.
2. a) Montrer que : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$.

   b) En déduire que pour tout entier n, $\quad u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.
   Déduire aussi que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   c) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
   Établir que pour tout entier n non nul,

   $$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$$

   Montrer que $\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.
3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

   b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.
4. Calculer $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.
   En déduire $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1})$.
5. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$.
   En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2

On rappelle que $e = e^1 \simeq 2{,}7$.
On considère la fonction f définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

2. Pour $x \in D$, Calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.

3. Dresser le tableau de variations de f en le complétant par les limites aux bornes de D.

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x, pour $x \in D$.
   b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in D$.

5. a) Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant e$.
   b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

6. a) Montrer que :
$$\forall x \in [e,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$
   b) Déterminer un encadrement de $f'(x)$ pour $x \in [e,+\infty[$ et en déduire que :
$$\forall x \in [e,+\infty[, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant le théorème de croissance de l'intégrale à $\left|\int_e^{u_n} f'(t)\mathrm{d}t\right|$, montrer que :
$$|u_{n+1} - e| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - e|.$$
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   c) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Proposition de corrigé du devoir surveillé 1

Exercice 1

1. Montrons par <u>récurrence</u> sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: «u_n est défini et $u_n \geq \sqrt{n}$ ».

- Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \geq 0$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$
  u_n est défini et $u_n \geq \sqrt{n} \geq 0$. Ainsi $n + 1 + u_n \geq n + 1 \geq 0$.
  Alors $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ est défini et la croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ donne $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n \geq \sqrt{n}.}$

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $\frac{1}{2}\left(1+x\right) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\sqrt{x} + x\right) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{x})^2 \geq 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}\left(1+x\right).}$

⇛ *On peut aussi étudier les variations de* $t \mapsto \frac{1}{2}\left(1+x\right) - \sqrt{x}$

b) Montrons par <u>récurrence</u> sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{Q}(n)$: «$u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$» .

- Initialisation : $\mathcal{Q}(0)$ est vraie car $u_0 \leq u_0 = 0 + \dfrac{u_0}{2^0}$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{Q}(n)$, montrons $\mathcal{Q}(n+1)$.
  $n+1+u_n \in \mathbb{R}_+$ donc $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \dfrac{1}{2}\left(1+n+1+u_n\right) = 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}u_n$
  D'après $\mathcal{Q}(n)$, il vient $u_{n+1} \leq 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{u_0}{2^n}\right) = 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} + \dfrac{u_0}{2^{n+1}} = n + 1 + \dfrac{u_0}{2^{n+1}}$.
  D'où $\mathcal{Q}(n+1)$ est vérifiée.
- Conclusion : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}.}$

Ce qui précède donne : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{n-1} \leq n - 1 + \dfrac{u_0}{2^{n-1}}$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \dfrac{u_{n-1}}{n^2} \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$.

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2} \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{u_0}{n^2 2^{n-1}}\right) = 0 + 0 + 0 = 0$.

Ainsi, d'après le <u>théorème des encadrements</u>, $\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geq 1} \text{ converge vers } 0.}$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_n}{n} = \sqrt{\dfrac{n + u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{u_{n-1}}{n^2}}$. Alors, d'après 2.b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = \sqrt{0+0} = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1} \text{ converge vers } 0.}$

D'après 1), $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} \leq u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}$.

Ainsi, $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_{n-1}}{n-1}\,\dfrac{n-1}{n}\right) = 0 \times 1 = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}} = 1$. <u>Par encadrements</u> $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 1.}$

3. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donc en 0 :
$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+0}}{x-0} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \left(\sqrt{1+x}\right)'_{(0)} = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)_{(0)} = \frac{1}{2}$$
Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.}$
De plus, $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1\right)$. Or $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n-1}}{n} = 0$ (vu en 2c),
donc par composition de limite, $\dfrac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}} \to \dfrac{1}{2}$ et donc
$$\frac{u_n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{n}} \to \frac{1}{2}$$
Or, d'après 2c, $\sqrt{n}\dfrac{u_{n-1}}{n} = \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}{n}\underbrace{\dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}}_{\to 1} = \sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \to 1.$
Ainsi, $u_n - \sqrt{n} \to \dfrac{1}{2}$ et donc $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$

4. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \dfrac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$
Comme $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0$ alors $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) = 0}$.
De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} = \left(u_n - \sqrt{n}\right) - \left(u_{n-1}-\sqrt{n-1}\right) + \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.
Alors $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(u_n-u_{n-1}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0 = 0}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1}-u_n = \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}}$. Alors,
$$u_{n+1}-u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1+u_n}-\sqrt{n+u_{n-1}}\right)\left(\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}\right)}{\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}} = \frac{(n+1+u_n)-(n-u_{n-1})}{\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}}$$
Enfin, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}}$. Comme $\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}$ est strictement positif, il vient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n \text{ est du signe de } 1+u_n-u_{n-1}.}$
Or $1+u_n-u_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, d'après 4) ; alors, à partir d'un certain rang, $1+u_n-u_{n-1} > 0$ et a fortiori $u_{n+1}-u_n > 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{à partir d'un certain rang, la suite } (u_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$

Exercice 2

1. Comme $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$ ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0$ (pas de forme indéterminée).
   La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)}$ est une forme indéterminée ; par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
   Comme $\lim\limits_{1^-} \ln = 0^-$ ainsi, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln(x)} = -\infty$ (pas de forme indéterminée).
   De même, on trouve $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
   Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln(x)} = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty}$.

2. Soit $x \in D$, on a $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - x\frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$ et $\ln(x)^2 \geq 0$.
   Ainsi, $\boxed{\forall x \in D, f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2} \text{ qui est du signe de } \ln(x)-1.}$

3. On a : $\ln(x) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$ et $\ln(x) - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > e$.
   Le tableau de variations de f est :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0		$\Vert +\infty$				$+\infty$
		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\infty \Vert$		e		

4. a) Soit $x \in D$,
$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\ln(x)} = x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$$
   Ainsi, $\boxed{\text{La solution de } f(x) = x \text{ sur } D \text{ est } e.}$

   b) Soit $x \in D$,
$$f(x) - x = \frac{x}{\ln(x)} - x = \frac{x(1-\ln(x))}{\ln(x)}$$
   Ainsi,

x	0		1		e		$+\infty$
x		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$\ln(x)$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$1-\ln(x)$		$+$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)-x$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

5. a) Rédaction de la récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
   - Initialisation : soit $n = 0$, $u_0 = 3 > e$
   - Hérédité : soit $n \geq n$. Supposons $e \leq u_n$.
     D'après 3), on sait que f est croissante sur $[e, +\infty[$ donc
$$e \leq u_n \quad \Rightarrow \quad f(e) \leq f(u_n) \quad \Rightarrow \quad e \leq u_{n+1}$$
   - Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e.}$

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 4b),
$$u_n \geq e \quad \Rightarrow \quad f(u_n) - u_n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \leq u_n \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n$$
   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

c) La suite est décroissante et minorée ; d'après le théorème de limite monotone, la suite converge.
Notons ℓ la limite de la suite; alors, $u_{n+1} \to \ell$ et la continuité de f en e donne que $f(u_n) \to f(\ell)$.
Par unicité de la limite, ℓ vérifie $f(x) = x$, c'est-à-dire d'après 4a), $\ell = e$.
Ainsi, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } e}$.

6. a) Soit $x \geq e$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{\ln(x)} + \frac{4}{\ln(x)^2}\right)\\ &= \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)^2}\\ &= \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2} = f'(x)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [e, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2}$.

b) On a

$$\begin{aligned} e \leq x \quad &\Rightarrow \quad 1 = \ln(e) \leq \ln(x) \text{ car } \ln \text{ est croissante}\\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{\ln(x)} \leq 1 \text{ car } t \mapsto \tfrac{1}{t} \text{ est décroissante}\\ &\Rightarrow \quad -2 \leq -\frac{2}{\ln(x)} \leq 0 \text{ car } -2 < 0\\ &\Rightarrow \quad -1 \leq 1 - \frac{2}{\ln(x)} \leq 1\\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq 1\\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq 0\\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 = f'(x) \leq \frac{1}{4}\\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [e, +\infty[, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}}$.

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, f' étant continue sur $[e, +\infty[$ et $e \leq u_n$, la croissance de l'intégrale donne :

$$\left|\int_e^{u_n} f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_e^{u_n} |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_e^{u_n} \frac{1}{4}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(u_n - e)$$

De plus, d'après la définition de la suite (u_n) et d'après 4a),

$$\left|\int_e^{u_n} f'(t)\mathrm{d}t\right| = |[f(t)]_e^{u_n}| = |f(u_n) - f(e)| = |u_{n+1} - e|$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|}$.

b) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : pour $n = 0$: $\dfrac{1}{4^0} = 1$ et $u_0 - e \approx 0.3 < 1$.
La relation est vraie au rang 0.

- <u>Hérédité :</u> soit $n \geq 0$, on suppose $|u_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - e| &\leq \frac{1}{4}\,|u_n - e| \ \text{ d'après 7a)} \\ &\leq \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{1}{4^{n+1}} \end{aligned}$$

  La relation est vérifiée au rang $n+1$.

- <u>Conclusion :</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}}$.

c) Or $\dfrac{1}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; ainsi, par <u>encadrement</u>, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } e}$.