

Nombres complexes – Exercices

FORME ALGÈBRIQUE, FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Exercice 3.1 Mettre sous forme algébrique :

$$a = \frac{2+i}{i}, \quad b = \frac{1}{1-4i}, \quad c = \frac{1+i}{i-2}, \quad d = \frac{(1+i)(4+3i)}{(5-i)(2+i)}$$

Exercice 3.2 Donner le module et un argument des nombres suivants :

$$\begin{aligned} a &= -3 + 3i & d &= \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \\ b &= -3 + \sqrt{3}i & e &= -2 \\ c &= (i - \sqrt{3})^{2022} & f &= (2-2i)(\sqrt{3}+i) \end{aligned}$$

Exercice 3.3 Mettre sous forme trigonométrique :

$$z_1 = 1 + \cos \varphi - i \sin \varphi; \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad z_3 = \frac{\cos x - i \sin x}{\sin x - i \cos x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = 1 + i \tan \alpha; \quad \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[\quad z_4 = \frac{(-7+7i)^2}{(\sqrt{3}-i)^3}$$

Exercice 3.4

Expliciter la forme algébrique et la forme trigonométrique de $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3.5 On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer j^2 , et en déduire les relations

$$1 + j + j^2 = 0 \quad j^3 = 1 \quad \frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}.$$

2. Mettre sous forme algébrique $(1+j)^6$. Calculer $j^{2022} + j^{2023} + j^{2024}$.

Exercice 3.6

Prog

Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Méthode

→ Compléter la formule d'Euler pour travailler dans \mathbb{C}
Ici, considérer $C_n + iS_n$

Exercice 3.7 Calculer la somme $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$

Indication : Même méthode que pour l'exercice 3.6.

Exercice 3.8 Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que

$$(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$$

Indication : Utiliser la forme trigonométrique.

Exercice 3.9 Linéarisation

Classique

1. Linéariser $\cos x \sin(3x)^3$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(3x)^3 dx$.

2. Calculer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 dx$.

3. Donner une primitive de : $f_1 = \sin^5$ $f_2 = \cos^5$ $f_3 = \sin^2 \cos^2$

Exercice 3.10 Formule de Machin

Montrer que : $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$

Avec cette formule, John Machin calcula en 1706 les 100 premières décimales de π .

Exercice 3.11

1. Montrer que $\forall c, d \in \mathbb{C}$, $|2\operatorname{Re}(cd)| \leq 2|cd| \leq 1 + |cd|^2$

2. Pour chaque égalité, caractériser le cas d'égalité.
 3. En déduire que $\forall c, d \in \mathbb{C}$

$$|c - d|^2 \leq (1 + |c|^2)(1 + |d|^2)$$

et préciser le cas d'égalité.

EQUATIONS ET CALCULS DE RACINES NIÈMES

Exercice 3.12

1. Calculer, dans \mathbb{C} , les racines carrées de $1 - 3i$, $3 - i\sqrt{2}$ et $-7 - 24i$.
 2. Calculer la puissance 4 ième et les racines 5 ième de $\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 3.13 Résoudre dans \mathbb{C} : $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$.

Exercice 3.14 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^3 - (3 + 3i)z^2 + (3 + 10i)z + 3 - 9i = 0$$

sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Exercice 3.15 Résoudre dans \mathbb{C} :

$$\begin{array}{lll} a) z^5 = i & b) z^2 - 2iz - 2i = 0 & c) z^2 - (3 + 2i)z + (1 + i) = 0 \\ d) z^4 = 2 + 2i & e) \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = 1 \end{cases} & f) (1 + i\sqrt{3})z^4 = 1 - i \end{array}$$

Exercice 3.16

Méthode

→ Se ramener rechercher des racines nième de l'unité.
 Ici, mettre l'équation sous la forme $Z^4 = 1$.
 Résoudre l'équation $(2z - 1)^4 = z^4$.

Exercice 3.17

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, avec $n \geq 2$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0.$$

Exercice 3.18

Méthode

→ Lorsque l'expression est multiplicative, travailler à partir de la forme trigonométrique. Ici, considérer $z = re^{i\theta}$
 Déterminer dans \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes z tels que : $\bar{z} = z^3$.

Exercice 3.19 Résoudre dans \mathbb{C} : $|z - 1| = 1$, $z + \bar{z} = |z|$ et $|z - i| = |1 - z|$.

Indication : Faire une interprétation géométrique.

Exercice 3.20

Déterminer les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient même module.

AUTRES EXERCICES

Exercice 3.21

Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1. Comparer $\frac{1}{z}$ et \bar{z} ?

Donner une caractérisation de $u \in \mathbb{R}$ en fonction de \bar{u} .

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ de module 1 avec $zz' + 1 \neq 0$. Montrer que $u = \frac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$.

Indication : Montrer que $\bar{u} = u$ en utilisant $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Exercice 3.22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $T = \sum_{\alpha \text{ tel que } \alpha^n = 1} |\alpha - 1|$.

Indication : Poser $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$; ainsi les racines n ième sont les α^k pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
 Ensuite se ramener à une somme de sinus par la formule d'Euler.

Exercice 3.23

Soient $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$.

1. Montrer que $\forall z \in \Pi$, $\frac{z - i}{z + i} \in \mathcal{D}$.

2. Montrer que l'application $f : \Pi \rightarrow \mathcal{D}$ définie par $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$ est une bijection puis calculer sa réciproque.

Exercice 3.24 Soit l'équation: $a \in \mathbb{C}$ (E) $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a$

Montrer que $|a| = 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que z soit un réel. Puis, résoudre (E) en posant $a = e^{i\theta}$.

Exercice 3.25

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que : $|z+1| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z^2+1| > \frac{5}{4}$.

Exercice 3.26 Résoudre $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.27 Soit z un complexe différent de $-1, 0$ et 1 . A, B, C, D et E ont pour affixes respectives $1, -1, z, \frac{1}{z}$ et $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Vérifier que C, D et E sont alignés.

2. Prouver que $[ED)$ est la bissectrice de l'angle de $[EA)$ et $[EB)$.

Exercice 3.28 Identifier les éléments caractéristiques des applications du plan représentées par :

1. $z \mapsto 2z - 1 + i$

2. $z \mapsto (1+i)z + 2$
