DM 1

à rendre le lundi 2 octobre 2023

On considère les fonctions f et φ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) \\ \varphi(x) = \text{Arcsin}\left(\sin(2x)\right) \end{cases}$$

1. Identifier l'ensemble de définition de φ, sa parité et sa périodicité éventuelle.
2. Simplifier $\varphi(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ d'une part, et pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'autre part.
3. En déduire l'allure de la courbe représentative de φ.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |2x| \leq 1 + x^2$$
En déduire le domaine de définition de f.
5. Étudier la parité de f.
6. Lorsque $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, exprimer en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$:
$$\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$$
En déduire une expression simplifiée de $f(\tan(t))$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions φ et Arctan.
8. En déduire les variations de f sans calculer la dérivée.
9. Dresser le tableau de variations de f, préciser les limites éventuelles de f.
Justifier que f présente un minimum et un maximum.
10. Montrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, \infty[$.
11. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[$. On prendra soin de vérifier la cohérence du résultat avec la question 8.
12. Étudier la dérivabilité de f en -1 et 1 et préciser l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage des points d'abscisses -1 et 1.
13. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$, en précisant la tangente à l'origine.
14. Lorsque $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que la droite d'équation $y = h$ rencontre $\mathcal{C}_f$ en deux points A et B dont on déterminera les abscisses.
15. Déterminer et construire la courbe décrite par le milieu I du segment $[AB]$ quand h varie.