DM 2

à rendre le lundi 9 octobre 2023

Equations complexes

1. Montrer que le point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ appartient au cercle de centre C d'affixe $c \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si z vérifie :

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + c\overline{c} = r^2$$

2. A quelle condition sur le réel d l'équation $z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z = d$ est-elle l'équation d'un cercle ? Préciser alors le centre et le rayon de ce cercle.

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b telles que $a \neq b$. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

3. A l'aide de la question précédente, montrer que l'ensemble Γ des points d'affixes z tels que :

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$$

est un cercle, sauf cas d'exception à préciser.

4. Dans le cas du cercle, donner le centre et le rayon.

Dans la suite de l'exercice, on considère l'équation $(\mathcal{E})$ d'inconnue z :

$$(z-a)^n - c(z-b)^n = 0$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Montrer que les points dont les affixes sont solutions de $(\mathcal{E})$ se trouvent soit sur un cercle, soit sur une droite, selon les valeurs de $|c|$.

6. Dans cette question, on considère qu'il existe $(\gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $\rho \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} c = \exp(i\gamma) \\ a = \overline{b} = \rho \exp(i\alpha) \end{cases}$$

a) Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

b) Vérifier que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont toutes réelles. Est-ce cohérent avec le résultat de la question 5 ?

Soient $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note $(\mathcal{F})$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}$$

7. Mettre $1 + i\tan(\alpha)$ sous forme trigonométrique.

En déduire le module et l'argument de $\varphi(\alpha) = \dfrac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}$.

8. Montrer, sans les calculer, que les solutions de $(\mathcal{F})$ sont réelles.

9. On souhaite effectuer le changement de variable $z = \tan(t)$. Justifier la validité de ce changement de variable. Écrire l'équation $(\mathcal{F}')$ telle que z est solution de $(\mathcal{F})$ si et seulement si t est solution de $(\mathcal{F}')$.

10. En déduire les solutions de $(\mathcal{F})$.