

Colle 4

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

EXTRAIT DU PROGRAMME

1. NOMBRES COMPLEXES

A. NOMBRES COMPLEXES

Parties réelle et imaginaire.

La construction de \mathbb{C} est hors programme.

Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

On identifie \mathbb{C} au plan usuel d'un repère orthonormé direct ("plan complexe").

B. CONJUGAISON ET MODULE

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Image du conjugué dans le plan complexe.

Module.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

C. NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1 ET TRIGONOMÉTRIE

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Notation \mathbb{U} .

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

D. FORMES TRIGONOMÉTRIQUES

Forme trigonométrique $r \exp(i\theta)$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$ en $A \cos(t - \varphi)$.

E. ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.

Résolution des équations du second degré dans \mathbb{C} .

Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

F. RACINES n -IÈMES

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation \mathbb{U}_n .

Représentation géométrique.

G. EXPONENTIELLE COMPLEXE

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et argument de e^z .

Exponentielle d'une somme.

Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.

H. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-b}{c-a}$.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

Interprétation géométrique de la conjugaison.

L'étude générale des similitudes est hors programme.

2. TECHNIQUES FONDAMENTALES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

A. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE À VALEURS RÉELLES OU COMPLEXES

D. DÉRIVATION D'UNE FONCTION COMPLEXE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Manipulation des fonctions trigonométriques (résoudre des équations et inéquations, transformer une somme en produit, linéariser, transformer $\cos(nt)$ en un polynôme en $\cos(t)$)
- Utiliser la forme trigonométrie ($1 \pm e^{it}$, $e^{iu} \pm e^{iv}$, racines nième)
- Utiliser la forme algébrique (racine carrée)
- Utiliser le lien entre les racines et les coefficients d'un trinôme
- Manipuler une fonction à valeurs complexes
- Aborder la géométrie du plan (point, vecteur, angle, alignement, orthogonalité, similitudes directes)

QUESTIONS DE COURS

- Définir les notions (et les propriétés associées) de conjugué, module, argument, formes algébriques et trigonométriques ; citer les formules d'Euler et de Moivre.
- ★ Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
- ★ Présenter la technique de *l'angle moitié* pour factoriser $e^{ip} \pm e^{iq}$ et en déduire les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.
- Citer et retrouver les formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos(a) \cos(b)$, $\sin(a) \cos(b)$, $\sin(a) \sin(b)$, $\cos(p) + \cos(q)$, $\tan(a \pm b)$, $\tan(2a)$ et $a \cos(t) + b \sin(t)$ en $A \cos(t - \varphi)$.
- ★ Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ (exercice 3.6)
- ★ Savoir exprimer $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.
Mettre en oeuvre lors de la résolution d'une équation de votre choix.
- ★ Définir ce que signifie linéariser une expression trigonométrique.
Mettre en oeuvre lors du calcul d'une intégrale de votre choix.
- ★ Introduction de \mathbb{U}_n (lemme), théorème sur les racines nième d'un nombre complexe.
- Définition d'une racine carrée. Décrire les outils pour les calculer (formes algébrique et trigonométrique).
Présenter un exemple pour chacune des deux situations.
- Interprétation géométrique des nombres complexes : affixe, module, argument de $\frac{z_2}{z_1}$, alignement, orthogonalité, translations, homothéties, rotations, applications $z \mapsto az + b$
- ★ Définir la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes et les opérations associées.
Établir $(\exp(\varphi))' = \varphi' \exp(\varphi)$ où $\varphi \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.