

DM 3

à rendre le lundi 16 octobre 2023

Exercice 1

Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{te^t}$.

1. Posons G une primitive de $g : t \mapsto \frac{1}{te^t}$. Donner une relation entre f et G .
2. En déduire la dérivée de f .
3. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.
4. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 2

Si $z \in \mathbb{C}$, on note \bar{z} le conjugué de z . On définit la fonction f par :

$$f(z) = \frac{z}{z + \bar{z} - 1}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Déterminer les antécédents par f de 1 et i .
3. Déterminer les nombres complexes z invariants par f (c'est-à-dire tels que $f(z) = z$).
4. En étudiant les solutions de l'équation $f(z) = w$ en fonction du paramètre complexe w , montrer que f réalise une bijection de D sur D et déterminer la bijection réciproque.