DS 2

Mercredi 4 octobre 2023 – durée 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1 - La somme des cancres

Rappel et notation :

- Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que b divise a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.
- Deux entiers sont dit ***premiers entre eux*** si les entiers qui divisent l'un et l'autre sont -1 et 1.
- Pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \frac{a}{b}$. On dit que le quotient $\frac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé FFI) de x. Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\frac{0}{1}$.

Partie A - Somme des cancres

Définition – Somme des cancres
Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ de FFI respectives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. La sommes des cancres de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}$$

Par exemple, $\frac{3}{5} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3+2}{5+7} = \frac{5}{12}$ en remarquant bien que $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{7}$ sont des FFI.

1. Justifier que $\frac{2}{4} \oplus \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$.
2. Soit $a, b, n \in \mathbb{Z}$, a et b étant non nuls. Montrer que les diviseurs communs de a et b sont les mêmes que les diviseurs communs à a et $b + na$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$.
   a) Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.
   b) On note $\frac{a}{b}$ la FFI de x et $\frac{c}{d}$ la FFI de y. La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\frac{a+c}{b+d}$?
4. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie, soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.
   a) Pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus 0 = x$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus x = x$.

c) Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus y = y \oplus x$.

d) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

e) Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$, $\dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x \oplus y}$.

f) Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$.

5. Soit $x, y \in \mathbb{Q}_+$.

   a) Montrer que $x \oplus y = x$ si et seulement si $x = y$.

   b) Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.

6. Interprétation géométrique. On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J). Pour $x \in \mathbb{Q}_+$, de FFI $\dfrac{a}{b}$, on note M_x le point de coordonnées $(b; a)$.

   a) Soit $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$, montrer que $O, M_{x \oplus y}$ et le milieu de $[M_x, M_y]$ sont alignés.

   b) Qu'est la droite $\left(OM_{x \oplus y}\right)$ pour le triangle OM_xM_y ?

7. Soit $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ de FFI respectives $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, tels que $a > c$ et $b < d$.
   En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle OM_xM_y est
   $$\frac{ad - bc}{2}$$

Partie B - suites de Farey

Définition – Suites de Faray
Pour tout entier $n > 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n. On note F_n cette suite. Par exemple :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$$
$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$$
$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$$

8. Déterminer F_4, F_5 et F_6.

9. Soit $x \in \mathbb{Q}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que x est un terme de la suite F_n si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ avec b non nul tels que $x = \dfrac{a}{b}$ et $0 \leq a \leq b \leq n$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.

11. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1 - x$ également.

12. On considère l'application θ qui à tout $x \in \mathbb{Q}_+$ associe le couple (a, b) tel que $\dfrac{a}{b}$ est la FFI de x.

    a) Montrer que θ est injective.

b) Montrer que θ n'est pas surjective lorsque l'on considère l'ensemble d'arrivée suivant :

$$\{(a,b); a,b \in \mathbb{N}\}$$

c) Soit x un élément de la suite F_n, non nul. Montrer que $\theta(x) \in \{(a,b); a,b \in [\![1,n]\!]\}$.

d) On note f_n le nombre de termes de F_n. Montrer que $f_n \leq n^2+1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n=1$.

Problème 2 - Logarithme à base

Dans ce problème, tout résultat du cours spécifique aux fonctions logarithmes devra être démontré avant de pouvoir être éventuellement utilisé.

Partie A : logarithme de base a

Définition –
*On appelle **logarithme** toute fonction f définie sur $]0;+\infty[$, dérivable, telle que :*

(i) il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{a}{x}$

(ii) $f(1) = 0$.

1. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{a}{x}$.
   Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme népérien).

2. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

3. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$$

   Indication : on pourra étudier, pour y fixé, la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

4. Montrer que pour tout nombre réel x > 0, $f_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f_a(x)$

5. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que

$$f_a(x^r) = r f_a(x)$$

   Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

6. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

7. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.

8. Comment peut-on généraliser le résultat des questions 6) et 7) au cas des logarithmes f_a ?

Partie B - logarithme décimal

9. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$.
   Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

10. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\text{Log}(N)$.

11. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

    (a) Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?

    (b) Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $W.m^{-2}$) selon la formule
    $$L = 10\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
    où $I_0 = 10^{-12}W.m^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence $1000Hz$.

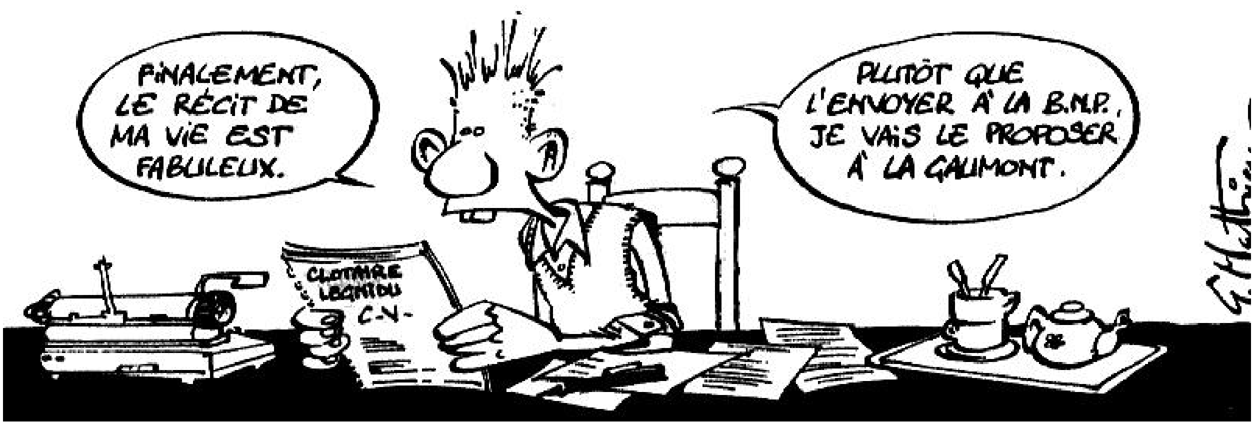
    (i) Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5}W.m^{-2}$.

    (ii) Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de $10dB$?

    (c) Une balle lancée d'une hauteur de $2m$ atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas $1mm$.
    Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

FIN DE L'ÉNONCÉ



Proposition de corrigé du devoir surveillé 2

Problème 1 - La somme des cancres

Partie A - Somme des cancres

1. L'opérateur $\oplus$ travaille sur des FFI ; la FFI de $\frac{2}{4}$ est $\frac{1}{2}$, ainsi :
$$\frac{2}{4} \oplus \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \oplus \frac{5}{3} = \frac{1+5}{2+3} = \frac{6}{5}$$

2. Procédons par double inclusion :
   - Soit c un diviseur commun à a et b : il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kc$ et $b = k'c$ alors $b + na = c(k' + nk)$.
   Ainsi, c est un diviseur commun à a et $b + na$.
   - Soit c un diviseur commun à a et $b + na$: il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kc$ et $b + na = k'c$ alors $b = (b + na) - na = c(k' - nk)$.
   Ainsi, c est un diviseur commun à a et b.

   Ainsi, $\boxed{\text{les diviseurs communs de } a \text{ et } b \text{ sont les mêmes que les diviseurs communs à } a \text{ et } b + na.}$
   En conséquence, a et b son premiers entre eux si et seulement si a et $b + na$ le sont.

3. Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ avec $\frac{a}{b}$ la FFI de x et $\frac{c}{d}$ la FFI de y.

   a) Comme $a + c \in \mathbb{N}$ et $b + d \in \mathbb{N}^*$ alors $\boxed{\frac{a+c}{b+d} = x \oplus y \in \mathbb{Q}_+.}$

   b) Considérons $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{3}{5}$ alors $x \oplus y = \frac{4}{8}$ dont la FFI est $\frac{1}{2}$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la FFI de } x \oplus y \text{ n'est pas toujours } \frac{a+c}{b+d}.}$

4. Examen des affirmations :

   a) "Pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus 0 = x$" est fausse.
   Un contre-exemple est $\frac{1}{2} \oplus 0 = \frac{1}{2} \oplus \frac{0}{1} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.

   b) "Pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus x = x$" est vraie.
   Pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ écrit sous FFI alors $x \oplus x = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = x$.

   c) "Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus y = y \oplus x$" est vraie.
   Pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$ écrits sous FFI, alors $x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c+a}{d+b} = y \oplus x$.

   d) "Pour tout $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$" est fausse.
   Un contre-exemple est $\frac{1}{3} \oplus \left(\frac{1}{6} \oplus \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \oplus \frac{2}{8} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{3} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$ et $\left(\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{6}\right) \oplus \frac{1}{2} = \frac{2}{9} \oplus \frac{1}{2} = \frac{3}{11}$.
   Attention ! la contrainte vient du fait que les fractions doivent être des FFI pour l'opérateur $\oplus$. Dès qu'il y a une simplification, nous perdons les entiers de départ.

   e) "Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$, $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$" est vraie.
   Pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$ écrits sous FFI, alors
$$\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b}{a} \oplus \frac{d}{e} \underset{\uparrow}{=} \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{\frac{a+c}{b+d}} = \frac{1}{x \oplus y}$$

On remarque que si une fraction $\dfrac{a}{b}$ est une FFI alors son inverse, $\dfrac{b}{a}$, l'est aussi.

f) "Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$" est vraie.
Pour $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $y = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$ écrits sous FFI et $n \in \mathbb{N}$. D'après 1), comme a et b sont premiers entre eux alors $a + nb$ et b le sont aussi. Il vient :

$$(n+x)\oplus(n+y) = \frac{a+bn}{b} \oplus \frac{c+nd}{d} = \frac{a+nb+c+nd}{b+d} = \frac{n(b+d)+a+c}{b+d} = n + \frac{a+c}{b+d} = n+(x\oplus y)$$

5. Soit $x, y \in \mathbb{Q}_+$.

a) Procédons par double implication :
- $\boxed{\Leftarrow}$ Comme $x = y$, d'après 3b) $x \oplus x = x$.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Notons $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ les FFI respectives de x et y.

$$x \oplus y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad ab + cb = ab + ad \quad \Rightarrow \quad cb = ad \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Ainsi, $\boxed{x \oplus y = x \text{ si et seulement si } x = y.}$

b) Notons $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ les FFI respectives de x et y avec $x < y$. Notons :

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc < 0$$

- $(x \oplus y) - x = \dfrac{a+c}{b+d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{(a+c)b - a(b+d)}{(b+d)b} = \dfrac{bc - ad}{(b+d)b} > 0$
- $y - (x \oplus y) = \dfrac{c}{d} - \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{c(b+d) - d(a+c)}{(b+d)d} = \dfrac{bc - ad}{(b+d)d} > 0$

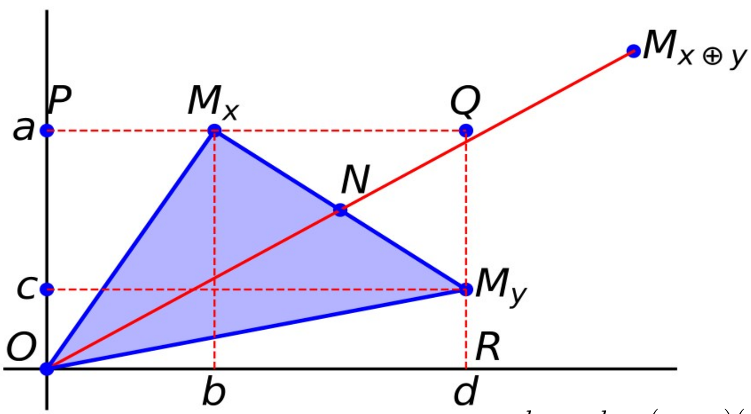
Ainsi, $\boxed{\text{si } x < y, \text{ alors } x < x \oplus y < y.}$

6. Interprétation géométrique. Notons $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ les FFI respectives de x et y. Soit $\dfrac{e}{f}$ la FFI de $x \oplus y$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a + c = ke$ et $b + d = kf$.

a) Notons N le milieu de $[M_x, M_y]$. Les coordonnées de O, $(0,0)$, de N, $\left(\dfrac{b+d}{2}, \dfrac{a+c}{2}\right)$, et $M_{x\oplus y}$, (e, f), sont donc proportionnelles entre elles. Ainsi, $\boxed{O, M_{x\oplus y} \text{ et le milieu de } [M_x, M_y] \text{ sont alignés.}}$

b) $\boxed{\text{La droite } \left(OM_{x\oplus y}\right) \text{ est la médiane issue de } O \text{ du triangle } OM_xM_y}$ puisque qu'elle passe par N le milieu de $[M_x, M_y]$.

7. Notons P, Q et R le point de coordonnées respectives $(0, a)$, (d, a) et $(d, 0)$.



$$\mathcal{A}_{OM_xM_y} = \mathcal{A}_{OPQR} - \mathcal{A}_{OPM_x} - \mathcal{A}_{ORM_y} - \mathcal{A}_{M_xM_yQ} = ad - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} - \frac{(a-c)(d-b)}{2} = \frac{ad-bc}{2}$$

Partie B - suites de Farey

8. $F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$

   $F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right)$

   $F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right)$

9. Procédons par double implication :

   - $\boxed{\Rightarrow}$ Notons $\frac{a}{b}$ la FFI de x, alors $b \leq n$ et $x \in [0,1]$ c'est-à-dire $0 \leq a \leq b$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Notons $\frac{a'}{b'}$ la FFI de x. Donc $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ et il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = da'$ et $b = db'$. Donc,

   $$0 \leq a \leq b \leq n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a' \leq b' \leq b \leq n \text{ et } 0 \leq \frac{a'}{b'} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in F_n$$

   Ainsi, $\boxed{x \in F_n \text{ si et seulement s'il existe } a, b \in \mathbb{N} \text{ avec } b \text{ non nul tels que } x = \frac{a}{b} \text{ et } 0 \leq a \leq b \leq n.}$

10. Soit $\frac{a}{b}$ la FFI de $x \in F_n$ alors $0 \leq a \leq b \leq n < n+1$, donc d'après 9), $x \in F_{n+1}$.
    Ainsi, $\boxed{\text{les termes de } F_n \text{ sont aussi des termes de } F_{n+1}.}$

11. Soit $\frac{a}{b}$ la FFI de $x \in F_n$ alors $0 \leq a \leq b \leq n$ et

    $$1 - x = \frac{b-a}{b} \in [0,1] \text{ avec } 0 \leq b - a \leq b \leq n$$

    D'après 9), $1 - x \in F_n$. Ainsi, $\boxed{\text{si } x \in F_n \text{ alors } 1 - x \in F_n.}$

12. Considérons l'application θ.

    a) Soit $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tel que $\theta(x) = \theta(x) = (a,b)$ où $\frac{a}{b}$ est une FFI, alors $x = y = \frac{a}{b}$.
    Ainsi, $\boxed{\theta \text{ est injective.}}$

    b) Soit $F = \{(a,b); a, b \in \mathbb{N}\}$. $(2,4) \in F$ mais la fraction $\frac{2}{4}$ n'est pas une FFI et donc n'a pas d'antécédent par θ.
    Ainsi, $\boxed{\theta \in F^{\mathbb{Q}_+} \text{ n'est pas surjective.}}$

    c) Soit $\frac{a}{b}$ la FFI $x \in F_n$ avec $x \neq 0$ alors $0 < a \leq b \leq n$ et $a, b \in [\![1,n]\!]$.
    Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in F_n \text{ non nul, } \theta(x) \in \{(a,b); a, b \in [\![1,n]\!]\}.}$

    d) On note $H_n = \{(a,b); a, b \in [\![1,n]\!]\}$. Comme θ est injective alors tout élément de H_n possède au plus un antécédent et donc, d'après 12c), le nombre d'élément non nul de F_n est inférieur u nombre d'élément de H_n à savoir n^2.
    Ainsi, $\boxed{f_n \leq n^2 + 1}$, le $+1$ correspond au nombre nul.
    $f_1 = 2 = 1^2 + 1$. Pour $n \geq 2$ alors $(2,2) \in H_n$ ne possède par d'antécédent par θ puisque ce n'est pas une FFI et donc $f_n < n^2 + 1$. $\boxed{\text{L'égalité } f_n = n^2 + 1 \text{ n'est vérifiée que si } n = 1.}$

Problème 2 - Logarithme à base

Partie A : logarithme de base a

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ est **continue** sur l'**intervalle** $\mathbb{R}_+^*$, donc elle possède des primitives et en particulier une unique primitive s'annulant en 1.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour $x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{a}{x} = a\,\dfrac{1}{x} = a\ln'(x) = (a\ln)'(x)$.
   Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_a = a\ln + \alpha$. De plus $f_a(1) = 0 = a\ln(1) + \alpha = \alpha$.
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R}^*,\ f_a = a\ln.}$

3. Soit $a \in_b R_+^*$ et $y > 0$. On considère la fonction $g : x \mapsto f_a(xy) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$.
   Comme $x \mapsto xy$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$,
   $$g'(x) = yf_a'(xy) = y\,\frac{a}{xy} = \frac{a}{x} = f_a'(x)$$
   Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g = f_a + \alpha$. De plus, $g(1) = f_a(y)$ par définition et $g(1) = f_a(1) + \alpha = \alpha$ donc $\alpha = f_a(y)$.
   Ainsi, pour tout $x > 0$, $g(x) = f_a(x) + f_a(y)$.
   Ainsi, pour tout $y > 0$ et tout $x > 0$, $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } a \in_b R^* \text{ et tout } x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ et d'après 3)
   $$f_a(x) + f_a\left(\frac{1}{x}\right) = f_a\left(x\,\frac{1}{x}\right) = f_a(1) = 0$$
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ f_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f_a(x).}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Procédons par étapes.
   ▶ Pour $r \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : f_a\big(x^n\big) = nf_a(x)$

   - Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est évidente : $f_a\big(x^0\big) = f_a(1) = 0 = 0f_a(x)$. $\mathcal{P}(1)$ est aussi évidente.
   - Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   $$f_a\big(x^{n+1}\big) = f_a\big(x\ x^n\big) \underset{3)}{=} f_a(x) + f_a\big(x^n\big) \underset{HR}{=} f_a(x) + nf_a(x) = (n+1)f_a(x)$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   - Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_a\big(x^n\big) = nf_a(x)$.

   ▶ Pour $r \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in -\mathbb{N}^*$, alors
   $$f_a\big(x^n\big) = f_a\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = f_a\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}\right) \underset{-n\in\mathbb{N}}{=} -nf_a\left(\frac{1}{x}\right) \underset{4)}{=} nf_a(x)$$

   ▶ Pour $r \in \mathbb{Q}$. Soit $r = \dfrac{n}{d}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}^*$:
   $$df_a\big(x^{\frac{n}{d}}\big) \underset{d\in\mathbb{N}}{=} f_a\left(\big(x^{\frac{n}{d}}\big)^d\right) = f_a\big(x^n\big) = nf_a(x)$$

En divisant par d on trouve $f_a\left(x^{\frac{n}{d}}\right) = \dfrac{n}{d} f_a(x)$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour } x > 0 \text{ et } r \in \mathbb{Q},\ f_a\left(x^r\right) = r f_a(x).}$

6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$. Ainsi, $\boxed{\ln \text{ est strictement croissante.}}$

7. La croissance de ln donne l'existence de ses limites en 0 et en $+\infty$.

- $2^n \to +\infty$ et $\ln\left(2^n\right) = n\ln(2) \to +\infty$ avec $\ln(2) > \ln(1) = 0$.
  Par unicité de la limite, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty}$
- $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition de limite $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{0} \ln = -\infty.}$

8. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors $f_a = a\ln$ est strictement croissante avec $\lim\limits_{+\infty} f_a = +\infty$ et $\lim\limits_{0} f_a = -\infty$.
Si $a \in \mathbb{R}_-^*$ alors $f_a = a\ln$ est strictement décroissante avec $\lim\limits_{+\infty} f_a = -\infty$ et $\lim\limits_{0} f_a = +\infty$.

Partie B - logarithme décimal

9. On sait que $f_a = a\ln$ donc

$$f_a(10) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a\ln(10) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\ln(10)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique logarithme Log} = f_{\frac{1}{\ln(10)}} \text{ tel que Log}(10) = 1.}$

10. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres, alors $N \in [\![10^{n-1}, 10^n - 1]\!]$. Comme Log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après 8),

$$\begin{aligned} 10^{n-1} \leq N < 10^n \quad & \Rightarrow \quad \mathrm{Log}\left(10^{n-1}\right) \leq \mathrm{Log}(N) < \mathrm{Log}\left(10^n\right) \\ & \Rightarrow \quad (n-1)\mathrm{Log}(10) \leq \mathrm{Log}(N) < n\mathrm{Log}(10) \\ & \Rightarrow \quad n-1 \leq \mathrm{Log}(N) < n \quad \Rightarrow \quad \lfloor \mathrm{Log}(N) \rfloor = n-1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la partie entière de Log}(N) \text{ est } n-1.}$

11. Exercices en vrac :

(a) Le nombre de chiffre de 4^{2019} correspond à la partie entière de son logarithme décimal augmenté de 1 :

$$\mathrm{Log}\left(4^{2019}\right) + 1 = 2019\mathrm{Log}(4) + 1 \approx 1216,6$$

Ainsi, $\boxed{\text{le nombre } 4^{2019} \text{ possède } \lfloor 2019\mathrm{Log}(4) \rfloor + 1 \text{ chiffres à savoir 1216 chiffres.}}$

(b) (i) Calcul du niveau sonore :

$$L = 10\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\mathrm{Log}\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\mathrm{Log}\left(10^7\right) = 10 \times 7\mathrm{Log}(10) = 70$$

(ii) Notons L et L' les niveaux sonores associés respectivement aux intensités I et I'.

$$\begin{aligned} L' = 10 + L \quad & \Leftrightarrow \quad 10\mathrm{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10 + 10\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) - \mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Log}\left(\frac{I'}{I}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{I'}{I} = 10 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{une augmentation du niveau sonore de } 10dB \text{ à pour effet de décupler l'intensité.}}$

(c) Introduisons une suite pour décrire la hauteur des rebonds successifs. Soit (r_n) la hauteur, en mm, atteinte lors du nième rebond. Alors

$$u_0 = 2000 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+1} = 0.7r^n$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 2000 \times 0,7^n$.
On cherche le premier n tel $r_n < 1$ ce qui désigne la fin des rebonds.

$$\begin{aligned} r_n < 1 \quad & \Leftrightarrow \quad 2000 \times 0,7^n < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Log}\big(2000 \times 0,7^n\big) < \mathrm{Log}(1) \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Log}(2000) + n\mathrm{Log}(0,7) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad n\mathrm{Log}(0,7) < -\mathrm{Log}(2000) \\ & \Leftrightarrow \quad n > -\frac{\mathrm{Log}(2000)}{\mathrm{Log}(0,7)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{La balle s'arrête après } \left\lfloor -\frac{\mathrm{Log}(2000)}{\mathrm{Log}(0,7)} \right\rfloor \text{ rebonds soit 21 rebonds.}}$
Le 22-ième ne se produit pas.