Matrices et systèmes – Exercices

Matrices

Exercice 6.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Calculer AB, B^3, CF, FC, D^2, D^3, D^{12} et E^6.

Exercice 6.2 ❄❄ Méthode

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de U et I_3.
2. Déterminer pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de U^k.
3. Utilisant la formule du binôme, donner une expression de A^n en fonction de A et I_3.

Exercice 6.3 ✔ Classique

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3. En déduire N^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer A en fonction de I_3 et N et en déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.4 ✔ Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.5 *Matrices nilpotentes* ❄❄

Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p=0$.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et telles que $AB = BA$.

1. Montrer que AB est nilpotente.
2. Montrer que $A + B$ est nilpotente.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, factoriser $I_n^k - A^k$ par $I_n - A$.
En déduire que $I_n - A$ est inversible.

Exercice 6.6 *Trace d'une matrice* ❄❄ Classique

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}\,A$ la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha, \gamma \in \mathbb{K}$:

$$\mathrm{tr}\,(\alpha A + \gamma B) = \alpha \mathrm{tr}\,(A) + \gamma \mathrm{tr}\,(B)$$

On dit que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.
3. Considérons $M, D, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$. Montrer que

$$\mathrm{tr}\,(M) = \mathrm{tr}\,(D)$$

Exercice 6.7 ✔ Les matrices B et P sont données.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible est donner P^{-1}.
2. Calculer D avec $D = P^{-1}BP$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$.
4. Déterminer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.8 ❄❄ On considère $M_\lambda = A - \lambda I_3$ avec $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que M_0 est inversible et que M_2 ne l'est pas.
2. Déterminer les λ tels que M_λ ne soit pas inversible.

Attention ! Lorsqu'un pivot dépend d'un paramètre, il convient d'effectuer une discussion ou de changer de pivot par échange de ligne.

Exercice 6.9

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On dit qu'un polynôme R est annulateur de la matrice A si $R(A) = 0$.

a) Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 - 2A$.

b) En déduire un polynôme R non nul, annulateur de la matrice A.

c) Déterminer les racines du polynôme R.

2. a) Soient $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Pour $i \in \{1; 2; 3\}$ calculer AU_i et l'exprimer simplement en fonction de U_1, U_2 et U_3.

b) Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

c) Vérifier la relation $AP = PD$.

3. a) Établir par récurrence, pour tout $n \geq 1$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

b) En déduire pour tout $n \geq 1$, la matrice A^n sous forme explicite.

4. Soit M la matrice carrée définie par $M = I - 2A + 5A^2$.

a) Montrer que $A^2P = PD^2$.
En déduire l'égalité $MP = P\left(I - 2D + 5D^2\right)$.

b) Enfin, montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

Exercice 6.10 On considère $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A$$
Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.

2. a) Vérifier que $P_1^2 = P_1$ et $P_1P_2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et calculer P_2P_1 et P_2^2.

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\left(4^{-k}P_1 + 9^{-k}P_2\right)A^k$ et en déduire que A^k est inversible.
En déduire pour tout $k \in \mathbb{Z}$ l'expression de A^k en fonction de P_1 et P_2.

4. Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ et expliciter la.

Exercice 6.11 **Classique**

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices J^2, et J^3. En déduire l'expression de J^n, pour $n \geq 3$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $M^n = I_3 + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}J^2$
3. L'écriture obtenue est-elle encore valable pour $n = 0$, $n = 1$ ou $n \in -\mathbb{N}$.

Exercice 6.12 Pour quelles valeurs de λ, la matrice suivant n'est pas inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 3 & 3 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 6.13
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$.

1. A quelle condition sur λ la matrice M est-elle inversible ?

2. Résoudre $M_\lambda X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour chacune des valeurs trouvées.

3. Former une matrice P en prenant pour colonne une solution des trois systèmes résolus. Déterminer l'inversibilité de P.

4. Donner $P^{-1}AP$.

Exercice 6.14
Justifier l'inversibilité puis calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.15 ❄❄ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

(i) A est inversible

(ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

1. Montrer que $(i) \quad \Rightarrow \quad (ii)$.

2. On supposons (ii).

a) Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, montrer que l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.

b) On pose C_i la solution de l'équation $AX = e_i = (\delta_{k,i})_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En déduire une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et conclure.

Exercice 6.16 *Lemme d'Hadamard* ❄❄❄
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

Systèmes linéaires

Exercice 6.17 ✔ Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x - z = -2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} y - x = \dfrac{7}{15} \\ 3x - 5y = -3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -2x + y + z = 2 \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ -x + y + 2z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 6.18
Résoudre le système homogène dont la matrice associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.19
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1 \end{cases}$$

Exercice 6.20 Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 6.21 Résoudre

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z + t &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 0 \\ 3x + 3y + 2z - t &= -1 \\ -y + 2z + 2t &= 1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + y + z + t &= 2 \\ x + y - z + 2t &= -1 \\ 2x + 2y + 3t &= 1 \\ x + y + 3z &= 5 \end{cases}$$

$$(S_3) : \left\{ x + y + z + t = 12 \right. \qquad (S_4) : \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= -2 \\ -x + 3y - z &= 2 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \\ x - 3y + z &= 2 \\ -x + y - 2z &= 1 \end{cases} \qquad (S_6) : \begin{cases} x + y + z + t &= 1 \\ 2x + y - z - 3t &= -1 \end{cases}$$

Exercice 6.22 Méthode

1. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système suivant admet-il au moins une solution ?

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}.$$

2. Déterminer $f(\mathbb{R}^3)$ avec :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x + 2y - z, -2x - 3y + 3z, x + y - 2z) \end{array}$$

Exercice 6.23 Montrer que l'application suivante est bijective et détermine l'expression de sa bijection réciproque.

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y - z, 3x - y + z, 2x - y) \end{array} \right.$$

Exercice 6.24 Soit $n \geq 2$, résoudre le système donné par :

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \qquad 2x_i - 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

Exercice 6.25 On pose $A(-3, -1)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 3)$ et $\overrightarrow{u}(1, 2)$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1 = (AB)$,
2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par C et dirigée par $\overrightarrow{u}$,
3. Déterminer $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.