DM 4

à rendre le lundi 6 novembre 2023

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$\left(x^2-1\right)y'+xy=1$$

Partie A – Solutions sur $\left]-1,1\right[$

1. Déterminer les solutions sur $\left]-1,1\right[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{H})$:

$$\left(x^2-1\right)y'+xy=0$$

2. En utilisant la méthode de variation de la constante, en déduire que les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\left]-1,1\right[$ sont les fonctions s_K définies par

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad s_K(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(K-\operatorname{Arcsin}(x)\Big)$$

3. Démontrer que, lorsque $K\neq\frac{\pi}{2}$, s_K a une limite infinie au point 1.
On distinguera les cas où $\lim\limits_{x\to1}s_K(x)=-\infty$ des cas où $\lim\limits_{x\to1}s_K(x)=+\infty$.
On considère l'application $f:\left]-1,1\right[\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}(x)\right)$$

4. Montrer que f est une fonction continue et dérivable sur $\left]-1,1\right[$. Calculer $f'(x)$ et vérifier que f est solution de $(\mathcal{E})$.
5. Démontrer que :

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,\quad f'(x)=\frac{xf(x)}{1-x^2}$$

En déduire que $f'(x)$ a le même signe que $f(x)$ pour tout $x\in\left]-1,1\right[$ puis en déduire le signe de $f'(x)$.
6. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$

$$\operatorname{Arcsin}(x)+\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

7. On pose $u(x)=\sqrt{1-x^2}$. En utilisant la question 6) vérifier que :

$$f(x)=\frac{\operatorname{Arcsin}\big(u(x)\big)}{u(x)}$$

En déduire que $f(x)$ a une limite lorsque x tend vers 1, puis compléter le tableau de variations de f sur $\left]-1,1\right[$.
On admettra que, si on prolonge f par continuité au point 1, la fonction prolongée est dérivable au point 1, de dérivée $f'(1)=-\frac{1}{3}$.
8. Tracer l'allure de $(\mathcal{C})$, la courbe représentative de f.

Partie B – Solutions sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$.

Considérons l'application g de $J =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in J, \quad g(x) = \frac{\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)}{\sqrt{x^2-1}}$$

9. Montrer que g est une fonction impaire qui est une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

En déduire les fonctions solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$.

10. Étudier la limite éventuelle de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

11. On note v l'application de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \quad v(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $v(x)$ ont le même signe lorsque $x \in]1,+\infty[$.

12. En déduire les variations de g sur J et tracer la courbe représentative (Γ) de l'application g. Pour tracer la courbe représentative de g, on admettra (et on ne le demande pas de le démontrer dans le cadre de ce devoir) que g se prolonge par continuité en une fonction dérivable au point 1 en posant $g(1) = 1$, et que $g'(1) = -\frac{1}{3}$.

Partie C – Prolongement en ± 1

13. Prouver l'existence d'une unique fonction φ continue, dérivable et solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-1,+\infty[$ (y compris au point 1). Quelle est la limite de φ en -1 ?

14. En effectuant la transformation $y(x) = -z(-x)$, montrer que y est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si z est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-\infty,1[$.

15. En déduire l'existence d'une unique fonction ψ continue, dérivable et solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-\infty,+1[$ (y compris au point -1).