TP 27 - Equations différentielles ordinaires – Méthode d'Euler

Objectif : Donner une solution approchée d'une équation différentielle d'ordre 1 de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y(t),t) \qquad t \in [a,b]$$

noté : $y' = f(y,t)$.

➢ Discrétisation de l'équation

On fixe un pas de la subdivision uniforme : h.
La suite $(t_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ vérifie $t_{k+1} = t_k + h$ ou encore $t_k = a + hk$ avec $t_0 = a$ et $|t_N - b| < h$.

Pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, on cherche une approximation y_k de $y(t_k)$.
Ainsi, pour $k \in [\![0,N-1]\!]$ on pose $y_0 = y(t_0)$ et

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\mathrm{d}t = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)\mathrm{d}t$$

La méthode d'Euler-Cauchy consiste à approximer localement la courbe par sa tangente :

$$y_{k+1} \approx y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t_k),t_k)\mathrm{d}t \approx y_k + \underbrace{(t_{k+1}-t_k)}_{=h} f(y(t_k),t_k)$$

➢ Retenir : $\boxed{\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = y_k + hf(y_k,t_k) \end{cases}}$

Remarque : Le pas d'avancement peut être négatif si $b < a$.
Remarque : La variable y peut être vectorielle, lorsque l'on veut résoudre une équation d'ordre supérieur.

Voici le programme PYTHON permettant de calculer $y(b)$ par la méthode d'Euler considérant la problématique ci-dessus :

Méthode Euler

```python
def euler(f,y0,a,b,h):
    if b<a: h=-h
    y=y0
    t=a
    while (b-t)/h>1:
        y=y+h*f(y,t)
        t=t+h
    return(y)
```

Exercice 1 Adapter la fonction ci-dessus afin de donner une fonction approx_exp(x,h) qui retourne une approximation de $\exp(x)$ où x est un réel et h est le pas de la méthode.

Exercice 2 En faisant les calculs à la main (avec un calculatrice) compléter le tableau pour approximer $\exp(1)$ avec $h = 0,1$:

x	0	0,1	0.2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(x)$	1										
$y'(x)$											

Exercice 3 Adapter la fonction précédente afin de donner une fonction approx_ln(x,h) qui retourne une approximation de $\ln(x)$ où x un réel strictement positif et h le pas de la méthode.

Exercice 4 ***Équation différentielle d'ordre 2***

1. Donner le problème de Cauchy vérifié par la fonction $y = \cos$.
2. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par le vecteur $Z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.
3. Proposer une fonction approx_pi(h) qui retourne une approximation de π en appliquant la méthode d'Euler de pas h au vecteur Z.
On rappelle que $\frac{\pi}{2}$ est la première racine de cos sur $\mathbb{R}_+$.

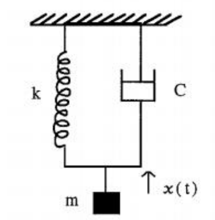
Exercice 5 *Méthode d'Euler*

1. Compléter le script de la fonction `Euler(f,y0,a,b,h)` réalisant la méthode d'Euler : on enregistre toutes les valeurs dans un tableau, la ième ligne contenant les valeurs associées à la ième étape, c'est-à-dire l'approximation à l'instant t_k des valeurs du vecteur de fonctions vérifiant l'équation différentielle d'ordre 1. La variable de sortie est similaire à celle que retourne la fonction `odeint`.

Méthode d'Euler

```
def euler(f,y0,a,b,h):
    if b<a: h=-h
    t=np.arange(a,b,h)
    n=len(t)
    T=np.zeros(...)
    T[0,:]=y0
    for i in range(...):
        T[i,:]=...
    return(t,T)
```

2. Application à la situation d'un ressort de raider k, avec frottement fluide, préalablement allongé pour assure l'équilibre d'une masse m. A l'instant $t = 0$ on l'écarte de sa position d'équilibre d'un abscisse x_0 et d'une vitesse nulle.



Le mouvement est décrit par l'équation :

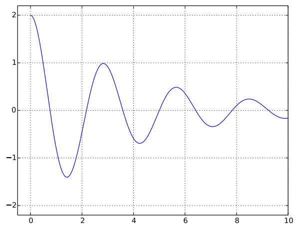
$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0 \text{ pour } t > 0$$

a) Réécrire le problème sous la forme d'un problème de Cauchy : $y' = f(y,t)$, $y(0) = y_0$.

b) Donner les instructions pour résoudre le problème en utilisant la fonction `euler` ci-dessus.

c) Donner les instructions pour afficher :

- le comportement du ressort : $t \mapsto (t, x(t))$



- le diagramme de phase : $t \mapsto (x(t), x'(t))$.